Uma História Geométrica

Humberto José Bortolossi[1]   Carlos Tomei[2]

[1]Departamento de Matemática Aplicada, UFF

[2]Departamento de Matemática, PUC-Rio

25º Colóquio Brasileiro de Matemática
IMPA, Rio de Janeiro, 24 a 29 de julho de 2005

No princípio

Axiomatização foi uma grande idéia:

os pontos de partida ficam claros,

as regras de encadeamento são explícitas,

tem alta capacidade de persuasão.

No princípio

Axiomatização foi uma grande idéia:

os pontos de partida ficam claros,

as regras de encadeamento são explícitas,

tem alta capacidade de persuasão.

Nos *Elementos*, Euclides (300 a.C., Alexandria, Egito) apresentou de forma axiomática a tradição geométrica da época.

No princípio

Axiomatização foi uma grande idéia:

os pontos de partida ficam claros,

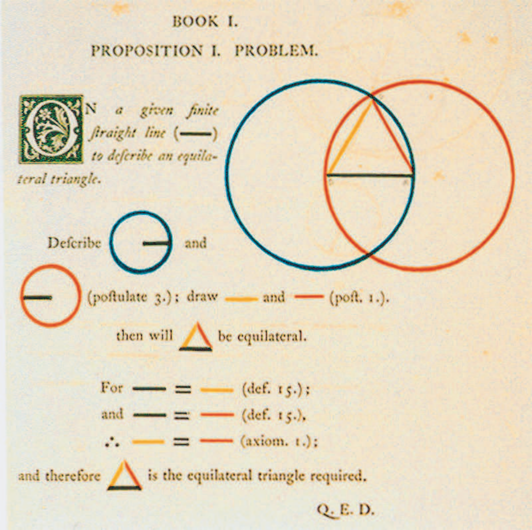
as regras de encadeamento são explícitas,

tem alta capacidade de persuasão.

Nos *Elementos*, Euclides (300 a.C., Alexandria, Egito) apresentou de forma axiomática a tradição geométrica da época.

A demonstração do primeiro resultado está errada.

A primeira demonstração errada



BOOK I.

PROPOSITION I. PROBLEM.

ON a given finite ſtraight line (——) to deſcribe an equilateral triangle.

Deſcribe and (poſtulate 3.); draw —— and —— (poſt. 1.).

then will be equilateral.

For —— = —— (def. 15.);

and —— = —— (def. 15.),

∴ —— = —— (axiom. 1.);

and therefore is the equilateral triangle required.

Q. E. D.

http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/byrne.html

Dois mil anos depois

Descartes (1596-1650) criou a geometria analítica, que faz da álgebra uma linguagem para a geometria.

Dois mil anos depois

Descartes (1596-1650) criou a geometria analítica, que faz da álgebra uma linguagem para a geometria.

Leibniz (1646-1716) pensou sobre a possibilidade de duas coisas quase matemáticas: uma linguagem simbólica universal, a *Characteristica Universalis*, e de um método automático de dedução, o *Calculus Ratiocinator*.

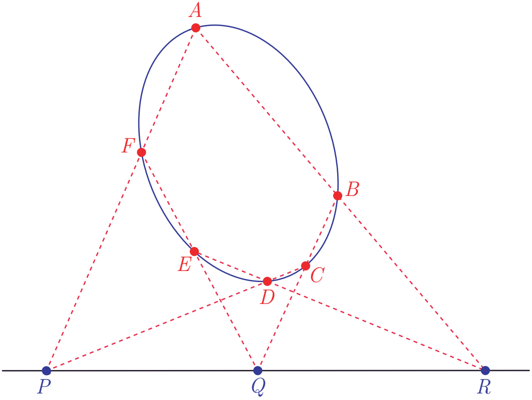
Dois mil anos depois

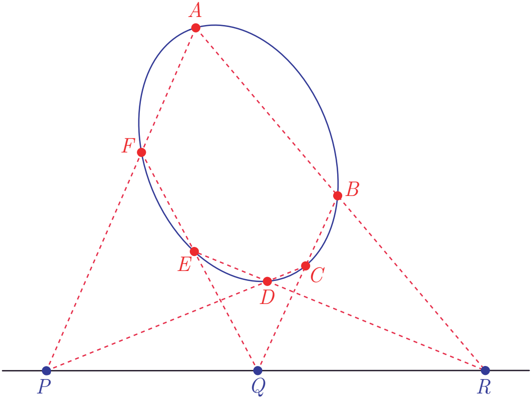
Descartes (1596-1650) criou a geometria analítica, que faz da álgebra uma linguagem para a geometria.

Leibniz (1646-1716) pensou sobre a possibilidade de duas coisas quase matemáticas: uma linguagem simbólica universal, a *Characteristica Universalis*, e de um método automático de dedução, o *Calculus Ratiocinator*.

Enquanto isso, na escola, geometria sobrevivia para treinar argumentação.

O teorema de Pascal





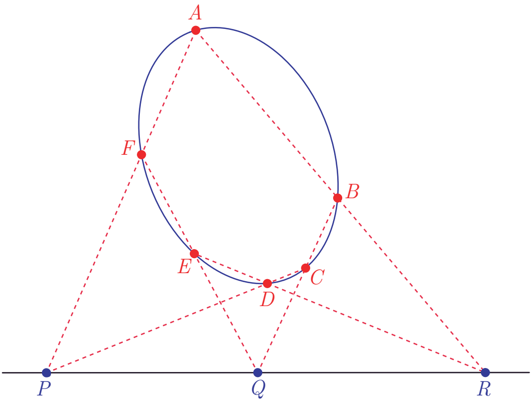
$$\mathcal{C}(x_A, y_A) = 0, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}(x_F, y_F) = 0$$

$$x_P = \mathcal{P}(x_A, y_A, x_F, y_F, x_C, y_C, x_D, y_D)$$
$$y_P = \mathcal{Q}(x_A, y_A, x_F, y_F, x_C, y_C, x_D, y_D)$$

$$x_Q = \mathcal{P}(x_E, y_E, x_F, y_F, x_B, y_B, x_C, y_C)$$
$$y_Q = \mathcal{Q}(x_E, y_E, x_F, y_F, x_B, y_B, x_C, y_C)$$

$$x_R = \mathcal{P}(x_D, y_D, x_E, y_E, x_A, y_A, x_B, y_B)$$
$$y_R = \mathcal{Q}(x_D, y_D, x_E, y_E, x_A, y_A, x_B, y_B)$$

O teorema de Pascal



$$\mathcal{C}(x_A, y_A) = 0, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}(x_F, y_F) = 0$$

$$x_P = \mathcal{P}(x_A, y_A, x_F, y_F, x_C, y_C, x_D, y_D)$$
$$y_P = \mathcal{Q}(x_A, y_A, x_F, y_F, x_C, y_C, x_D, y_D)$$

$$x_Q = \mathcal{P}(x_E, y_E, x_F, y_F, x_B, y_B, x_C, y_C)$$
$$y_Q = \mathcal{Q}(x_E, y_E, x_F, y_F, x_B, y_B, x_C, y_C)$$

$$x_R = \mathcal{P}(x_D, y_D, x_E, y_E, x_A, y_A, x_B, y_B)$$
$$y_R = \mathcal{Q}(x_D, y_D, x_E, y_E, x_A, y_A, x_B, y_B)$$

$$\Downarrow$$

$$\det \begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Como ver se $p(x)$ e $q(x)$ têm uma raiz comum?
(Bézout, XVIII)

Resultantes

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad \text{e} \quad q(x) = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D$$

têm raízes comuns

$$\Updownarrow$$

$$R_x(p,q) = \det \begin{pmatrix} a & b & c & & \\ & a & b & c & \\ & & a & b & c \\ A & B & C & D & \\ & A & B & C & D \end{pmatrix} = 0.$$

Resultantes

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad \text{e} \quad q(x) = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D$$

têm raízes comuns

$$\Updownarrow$$

$$R_x(p,q) = \det \begin{pmatrix} a & b & c & & \\ & a & b & c & \\ & & a & b & c \\ A & B & C & D & \\ & A & B & C & D \end{pmatrix} = 0.$$

$$p(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad q(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_x(p,q)(y) = 0.$$

O que se faz com polinômios?

Como ver se $p(x)$ e $q(x)$ têm uma raiz comum?
(Bézout, XVIII)

Como ver se $p(x)$ tem k raízes em $[a, b]$?
(Sturm, XIX)

Defina a partir de um polinômio p de grau 3:

$$\begin{aligned} p_3 &= p, \\ p_2 &= p', \\ p_1 &= -\mathrm{resto}(p_3, p_2), \\ p_0 &= -\mathrm{resto}(p_2, p_1). \end{aligned}$$

Contando raízes em um intervalo

Defina a partir de um polinômio p de grau 3:

$$\begin{aligned} p_3 &= p, \\ p_2 &= p', \\ p_1 &= -\text{resto}(p_3, p_2), \\ p_0 &= -\text{resto}(p_2, p_1). \end{aligned}$$

O número de raízes de p em $[a, b]$ é
(variação de sinais da seqüência p_3, p_2, p_1, p_0 em a)
menos
(variação de sinais da seqüência p_3, p_2, p_1, p_0 em b)
(quase sempre).

O que se faz com polinômios?

Como ver se $p(x)$ e $q(x)$ têm uma raiz comum?
(Bézout, XVIII)

Como ver se $p(x)$ tem k raízes em $[a, b]$?
(Sturm, XIX)

Como ver que um sistema polinomial a várias variáveis tem k soluções em um conjunto semi-algébrico?
(Seidenberg-Tarski, XX)

O que se pensava em 1900

Hilbert (1862-1943) achava que, para decidir algo em matemática, bastava trabalhar.

Hilbert (1862-1943) achava que, para decidir algo em matemática, bastava trabalhar.

Hilbert trabalhou muito: encontrou axiomas satisfatórios para a geometria euclidiana,

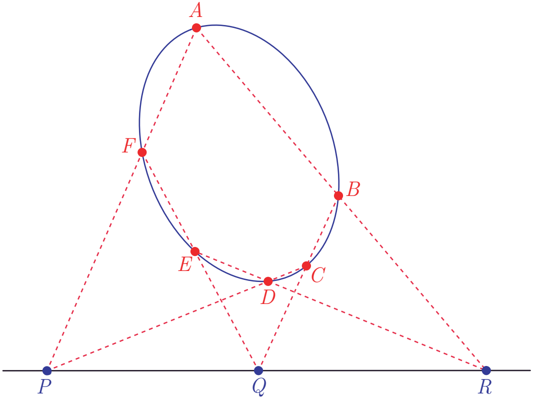
Hilbert (1862-1943) achava que, para decidir algo em matemática, bastava trabalhar.

Hilbert trabalhou muito: encontrou axiomas satisfatórios para a geometria euclidiana, descreveu propriedades geométricas usando geometria algébrica

O que se pensava em 1900

Hilbert (1862-1943) achava que, para decidir algo em matemática, bastava trabalhar.

Hilbert trabalhou muito: encontrou axiomas satisfatórios para a geometria euclidiana, descreveu propriedades geométricas usando geometria algébrica e mecanizou uma parte da geometria.



$$\mathcal{C}(x_A, y_A) = 0, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}(x_F, y_F) = 0$$

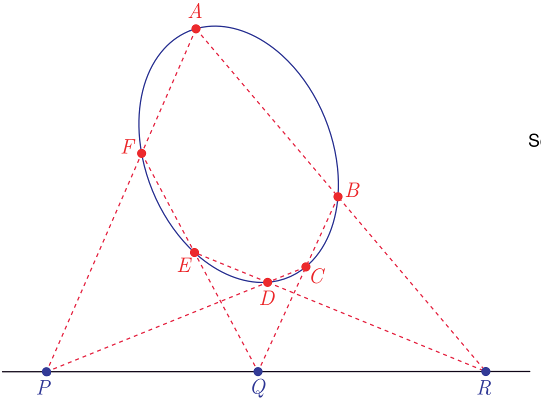
$$x_P = \mathcal{P}(x_A, y_A, x_F, y_F, x_C, y_C, x_D, y_D)$$
$$y_P = \mathcal{Q}(x_A, y_A, x_F, y_F, x_C, y_C, x_D, y_D)$$

$$x_Q = \mathcal{P}(x_E, y_E, x_F, y_F, x_B, y_B, x_C, y_C)$$
$$y_Q = \mathcal{Q}(x_E, y_E, x_F, y_F, x_B, y_B, x_C, y_C)$$

$$x_R = \mathcal{P}(x_D, y_D, x_E, y_E, x_A, y_A, x_B, y_B)$$
$$y_R = \mathcal{Q}(x_D, y_D, x_E, y_E, x_A, y_A, x_B, y_B)$$

$$\Downarrow$$

$$\det \begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{pmatrix} = 0$$



Se $h_i(x) = 0$ (os polinômios na hipótese),
então $t(x) = 0$ (o polinômio na tese)

é o mesmo que (Nullstellensatz)

$$t^k(x) = \sum a_i(x) h_i(x),$$

com a_i polinômios.

O que aprendemos em 1936

Gödel (1906-1978) desmentiu Hilbert: certas afirmações verdadeiras (i.e., sem contra-exemplos) *não seguem dos axiomas.*

Gödel (1906-1978) desmentiu Hilbert: certas afirmações verdadeiras (i.e., sem contra-exemplos) *não seguem dos axiomas.*

Ser verdadeiro não é ser demonstrável.

Por que Gödel nos pegou de surpresa?

Tarski (1902-1983) mostrou que a teoria de primeira ordem dos reais,

todas as frases com $\forall, \exists, x, 0, 1, +, -, *, =, >, \sim, \Rightarrow, \vee, \wedge$,

admite eliminação de quantificadores (1948).

Tarski (1902-1983) mostrou que a teoria de primeira ordem dos reais,

todas as frases com $\forall, \exists, x, 0, 1, +, -, *, =, >, \sim, \Rightarrow, \vee, \wedge,$

admite eliminação de quantificadores (1948).

Geometria elementar é decidível.

Por que Gödel nos pegou de surpresa?

Tarski (1902-1983) mostrou que a teoria de primeira ordem dos reais,

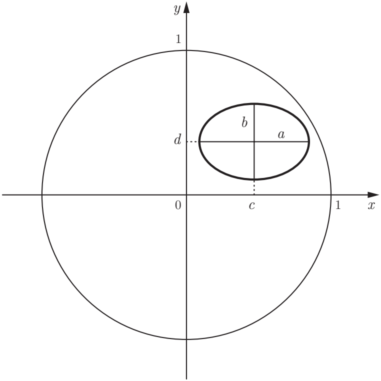
todas as frases com $\forall, \exists, x, 0, 1, +, -, *, =, >, \sim, \Rightarrow, \vee, \wedge,$

admite eliminação de quantificadores (1948).

Geometria elementar é decidível.

Decidir pode ser caro e as respostas, desumanas.

O problema da elipse de Kahan



$$a>0 \wedge b>0 \wedge \left[\forall\, x,y\in\mathbb{R}, \frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; x^2+y^2\leq 1\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$[(a>0) \wedge (T\geq 0) \wedge (c^2+(b+|d|)^2-1\leq 0) \wedge (a^2\leq b \vee a^2d^2\leq(1-a^2)(a^2-b^2))]$$
$$\vee$$
$$[(0<a=b) \wedge (c^2+d^2\leq(1-a)^2) \wedge (a\leq 1)]$$
$$\vee$$
$$[(0<a<b) \wedge (T\geq 0) \wedge (d^2+(a+|c|)^2-1\leq 0) \wedge (b^2\leq a \vee b^2c^2\leq(1-b^2)(b^2-a^2))],$$ onde T é

O problema da elipse de Kahan

$$
\begin{aligned}
T \quad = \quad & a^4 d^8 + ((2\,a^2 b^2 + 2\,a^4)\,c^2 + (-4\,a^4 + 2\,a^2)\,b^2 + 2\,a^6 - 4\,a^4)\,d^6 \\
& + ((b^4 + 4\,a^2 b^2 + a^4)\,c^4 + ((-6\,a^2 - 2)\,b^4 + (2\,a^4 + 2\,a^2)\,b^2 - 2\,a^6 - 6\,a^4)\,c^2 \\
& + (6\,a^4 - 6\,a^2 + 1)\,b^4 + (-6\,a^6 + 10\,a^4 - 6\,a^2)\,b^2 + a^8 - 6\,a^6 + 6\,a^4)\,d^4 \\
& + ((2\,b^4 + 2\,a^2 b^2)\,c^6 + (-2\,b^6 + (2\,a^2 - 6)\,b^4 + (-6\,a^4 + 2\,a^2)\,b^2 - 2\,a^4)\,c^4 \\
& + ((6\,a^2 + 4)\,b^6 + (-10\,a^4 - 6\,a^2 + 6)\,b^4 + (6\,a^6 - 6\,a^4 - 10\,a^2)\,b^2 + 4\,a^6 \\
& + 6\,a^4)\,c^2 + (-4\,a^4 + 6\,a^2 - 2)\,b^6 + (6\,a^6 - 8\,a^4 + 4\,a^2 - 2)\,b^4 \\
& + (-2\,a^8 + 4\,a^6 - 8\,a^4 + 6\,a^2)\,b^2 - 2\,a^8 + 6\,a^6 - 4\,a^4)\,d^2 + b^4 c^8 \\
& + (2\,b^6 + (-4\,a^2 - 4)\,b^4 + 2\,a^2 b^2)\,c^6 + (b^8 + (-6\,a^2 - 6)\,b^6 \\
& + (6\,a^4 + 10\,a^2 + 6)\,b^4 + (-6\,a^4 - 6\,a^2)\,b^2 + a^4)\,c^4 + ((-2\,a^2 - 2)\,b^8 \\
& + (6\,a^4 + 4\,a^2 + 6)\,b^6 + (-4\,a^6 - 8\,a^4 - 8\,a^2 - 4)\,b^4 + (6\,a^6 + 4\,a^4 + 6\,a^2)\,b^2 \\
& - 2\,a^6 - 2\,a^4)\,c^2 + (a^4 - 2\,a^2 + 1)\,b^8 + (-2\,a^6 + 2\,a^4 + 2\,a^2 - 2)\,b^6 \\
& + (a^8 + 2\,a^6 - 6\,a^4 + 2\,a^2 + 1)\,b^4 + (-2\,a^8 + 2\,a^6 + 2\,a^4 - 2\,a^2)\,b^2 + a^8 - 2\,a^6 + a^4 .
\end{aligned}
$$

Moral: Geometria elementar é mais simples que matemática.

Se o seu problema é demonstrar . . .

Moral: Geometria elementar é mais simples que matemática.

Mas o que é muito difícil em matemática?

Se o seu problema é demonstrar ...

Moral: Geometria elementar é mais simples que matemática.

Mas o que é muito difícil em matemática?

(Davis, Matiyasevich, Putnam e Robinson) Se você soubesse mostrar que um polinômio de grau 4 com coeficientes inteiros não tem soluções inteiras positivas, você saberia demonstrar Fermat, 4 cores, Goldbach, Riemann ...

Os personagens desta história








Bibliografia

H. J. Bortolossi. *“Demonstrações Automáticas em Geometria Euclidiana Plana”*. II Bienal da SBM, Salvador, 2004.

M. Davis. *“The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing”*. W. W. Norton & Company, 2000.

S. M. Rodrigues Lopes. *“Complexidade em Geometria Euclidiana Plana”*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, PUC-Rio, 2002.

C. Tomei. *“Euclides: A Conquista do Espaço”*. Coleção Imortais da Ciência, Editora Odysseus, 2003.