

Fourier — Uma Amostragem

Humberto José Bortolossi¹ Carlos Tomei²

¹Departamento de Matemática Aplicada, UFF

²Departamento de Matemática, PUC-Rio

III OKTOBERMAT

Departamento de Matemática, PUC-Rio

5 a 7 de outubro de 2005

A teoria dos epiciclos

A teoria dos epiciclos

Planetas orbitam em círculos sobre círculos sobre círculos ...

A teoria dos epiciclos

Planetas orbitam em círculos sobre círculos sobre círculos ...

As órbitas são parametrizadas por $r_1 e^{j\theta_1 t} + r_2 e^{j\theta_2 t} + \dots + r_k e^{j\theta_k t}$.

A teoria dos epiciclos

Planetas orbitam em círculos sobre círculos sobre círculos ...

As órbitas são parametrizadas por $r_1 e^{j\theta_1 t} + r_2 e^{j\theta_2 t} + \dots + r_k e^{j\theta_k t}$.

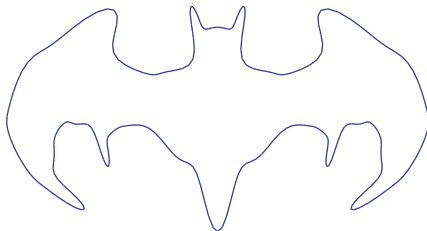
Uma órbita possível

A teoria dos epiciclos

Planetas orbitam em círculos sobre círculos sobre círculos ...

As órbitas são parametrizadas por $r_1 e^{i\theta_1 t} + r_2 e^{i\theta_2 t} + \dots + r_k e^{i\theta_k t}$.

Uma órbita possível



São tantas as representações ...

São tantas as representações ...

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{\ddots}}}}$$

São tantas as representações ...

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{\ddots}}}}$$

(Lambert: π é irracional)

São tantas as representações ...

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{\ddots}}}} \quad (\text{Lambert: } \pi \text{ é irracional})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

São tantas as representações ...

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{\ddots}}}} \quad (\text{Lambert: } \pi \text{ é irracional})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

Que tal a “base” $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ ou algum Gram-Schmidt a partir disso?
Por exemplo (Legendre):

$$1, \quad x, \quad \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2, \dots \quad x \in [-1, 1].$$

São tantas as representações ...

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{\ddots}}}} \quad (\text{Lambert: } \pi \text{ é irracional})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

Que tal a “base” $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ ou algum Gram-Schmidt a partir disso?
Por exemplo (Legendre):

$$1, \quad x, \quad \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2, \dots \quad x \in [-1, 1].$$

Senos e cossenos fazem isto “melhor” $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \right)$.

Uma base interessante em n dimensões

Uma base interessante em n dimensões

Ao usar a base canônica, você implicitamente declara que as coordenadas de um vetor não são correlacionadas.

Uma base interessante em n dimensões

Ao usar a base canônica, você implicitamente declara que as coordenadas de um vetor não são correlacionadas.

Uma amostragem de uma função suave não é assim.

Uma base interessante em n dimensões

Ao usar a base canônica, você implicitamente declara que as coordenadas de um vetor não são correlacionadas.

Uma amostragem de uma função suave não é assim.

Que tal procurar bases de vetores cujas coordenadas “variem menos”?

Uma base interessante em n dimensões

Ao usar a base canônica, você implicitamente declara que as coordenadas de um vetor não são correlacionadas.

Uma amostragem de uma função suave não é assim.

Que tal procurar bases de vetores cujas coordenadas “variem menos”?

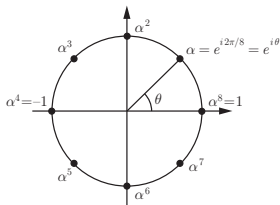
Por exemplo, em 8 dimensões, que tal os autovetores de

$$C_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & 0 \\ 0 & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & 0 \end{pmatrix} ?$$

(amonstrando no círculo)

A DFT em oito dimensões

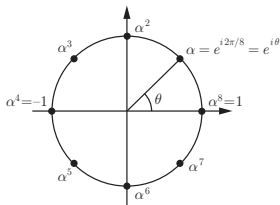
A DFT em oito dimensões



(oito pontos bem dispostos
no círculo unitário)

$$C_8 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & & & & \\ 1 & \alpha^3 & \vdots & & & & & \\ 1 & \alpha^4 & & & & & & \\ 1 & \alpha^5 & & & & & & \\ 1 & \alpha^6 & & & & & & \\ 1 & \alpha^7 & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^3 & \bar{\alpha}^4 & \bar{\alpha}^5 & \bar{\alpha}^6 & \bar{\alpha}^7 \\ 1 & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 & \dots & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^3 & \vdots & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^4 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^5 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^6 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^7 & & & & & & \end{pmatrix}$$

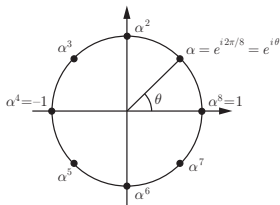
A DFT em oito dimensões



(oito pontos bem dispostos
no círculo unitário)

$$C_8 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sqrt{n} \mathcal{F}_8 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & & & & \\ 1 & \alpha^3 & \vdots & & & & & \\ 1 & \alpha^4 & & & & & & \\ 1 & \alpha^5 & & & & & & \\ 1 & \alpha^6 & & & & & & \\ 1 & \alpha^7 & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n} \mathcal{F}_8^* = \sqrt{n} \mathcal{F}_8^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^3 & \bar{\alpha}^4 & \bar{\alpha}^5 & \bar{\alpha}^6 & \bar{\alpha}^7 \\ 1 & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 & \dots & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^3 & \vdots & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^4 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^5 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^6 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^7 & & & & & & \end{pmatrix}$$

A DFT em oito dimensões



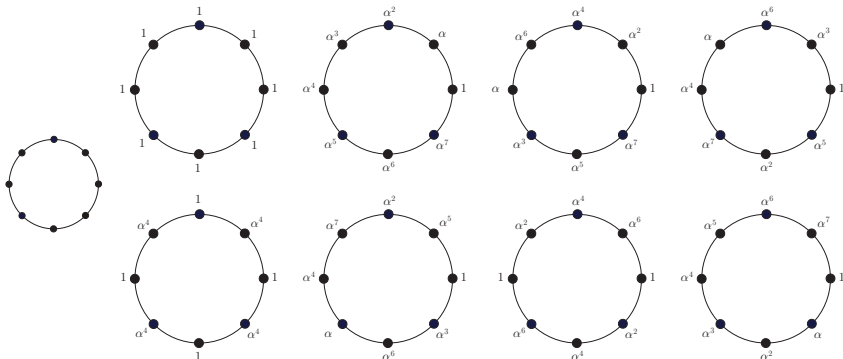
(oito pontos bem dispostos
no círculo unitário)

$$\mathbf{C}_8 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & & & & \\ 1 & \alpha^3 & \vdots & & & & & \\ 1 & \alpha^4 & & & & & & \\ 1 & \alpha^5 & & & & & & \\ 1 & \alpha^6 & & & & & & \\ 1 & \alpha^7 & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n} \mathcal{F}_8 \\ \sqrt{n} \mathcal{F}_8^* = \sqrt{n} \mathcal{F}_8^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^3 & \bar{\alpha}^4 & \bar{\alpha}^5 & \bar{\alpha}^6 & \bar{\alpha}^7 \\ 1 & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 & \dots & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^3 & \vdots & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^4 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^5 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^6 & & & & & & \\ 1 & \bar{\alpha}^7 & & & & & & \end{pmatrix}$$

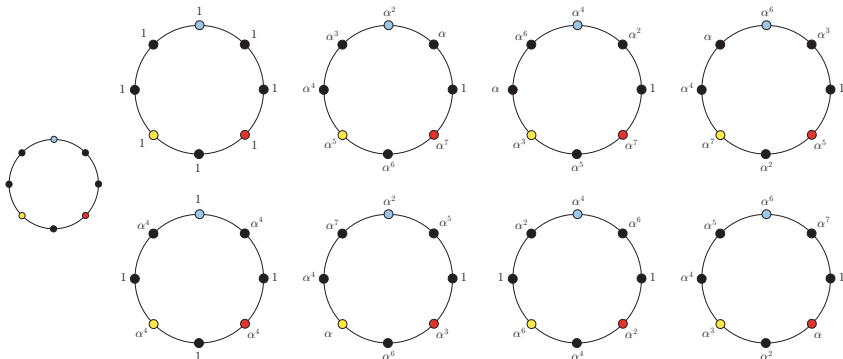
\uparrow $e^{j0\theta}$ \uparrow $e^{j1\theta}$ \uparrow $e^{j7\theta}$

Encontre todas as funções de \mathbb{Z}_8 em $\mathbb{C} - \{0\}$ que preservam multiplicações.

Encontre todas as funções de \mathbb{Z}_8 em $\mathbb{C} - \{0\}$ que preservam multiplicações.

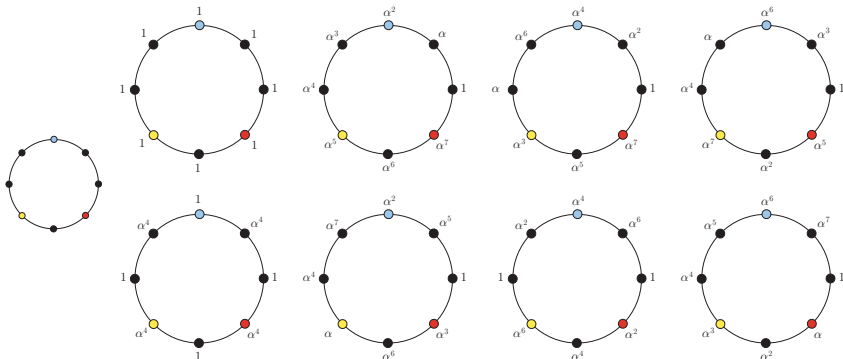


Encontre todas as funções de \mathbb{Z}_8 em $\mathbb{C} - \{0\}$ que preservam multiplicações.



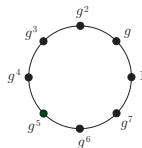
Outras trilhas

Encontre todas as funções de \mathbb{Z}_8 em $\mathbb{C} - \{0\}$ que preservam multiplicações.



Uma ação de \mathbb{Z}_8 :

$g \mapsto$



Fourier rápida rápido

Fourier rápida rápido

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 \\ 0 & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

Fourier rápida rápido

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

Fourier rápida rápido

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_7 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

Fourier rápida rápido

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_7 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_6 \\ v_1 \\ v_3 \\ v_5 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_c \\ u_b \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{F}_4 & \mathcal{F}_4 \\ \hline \mathcal{F}_4 D & -\mathcal{F}_4 D \end{array} \right] \begin{pmatrix} v_c \\ v_b \end{pmatrix}$$

Fourier rápida rápido

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_7 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_c \\ u_b \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{F}_4 & \mathcal{F}_4 \\ \hline \mathcal{F}_4 D & -\mathcal{F}_4 D \end{array} \right] \begin{pmatrix} v_c \\ v_b \end{pmatrix}$$

$$u_c = \mathcal{F}_4(v_c + v_b)$$

$$u_b = \mathcal{F}_4 D(v_c - v_b)$$

Do discreto ao contínuo

Do discreto ao contínuo

O polinômio característico da matriz de adjacência da bola de futebol é

$$(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda+1)^3(\lambda^4-3\lambda^3-2\lambda^2+7\lambda+1)^3(\lambda^2+\lambda-4)^4(\lambda^2-\lambda-3)^5(\lambda^2+\lambda-1)^5(\lambda+2)^4(\lambda-1)^9.$$

Do discreto ao contínuo

O polinômio característico da matriz de adjacência da bola de futebol é

$$(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda+1)^3(\lambda^4-3\lambda^3-2\lambda^2+7\lambda+1)^3(\lambda^2+\lambda-4)^4(\lambda^2-\lambda-3)^5(\lambda^2+\lambda-1)^5(\lambda+2)^4(\lambda-1)^9.$$

O polinômio característico da matriz de adjacência do fullereno (C_{60}) é

$$(\lambda-4)(\lambda^2+5\lambda+5)^3(\lambda^4-3\lambda^3-7\lambda^2+12\lambda+16)^3(\lambda^2+\lambda-9)^4(\lambda^2+\lambda-5)^4(\lambda^2+\lambda-3)^5(\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+8)^5.$$

Do discreto ao contínuo

O polinômio característico da matriz de adjacência da bola de futebol é

$$(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda+1)^3(\lambda^4-3\lambda^3-2\lambda^2+7\lambda+1)^3(\lambda^2+\lambda-4)^4(\lambda^2-\lambda-3)^5(\lambda^2+\lambda-1)^5(\lambda+2)^4(\lambda-1)^9.$$

O polinômio característico da matriz de adjacência do fullereno (C_{60}) é

$$(\lambda-4)(\lambda^2+5\lambda+5)^3(\lambda^4-3\lambda^3-7\lambda^2+12\lambda+16)^3(\lambda^2+\lambda-9)^4(\lambda^2+\lambda-5)^4(\lambda^2+\lambda-3)^5(\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+8)^5.$$

Considere em vez funções no círculo parametrizado por $[-\pi, \pi]$. Então

$$f(x) = \dots + c_{-1} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + c_{+1} \frac{e^{+ix}}{\sqrt{2\pi}} + \dots,$$

onde

$$c_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \left(\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ é uma "base" ortonormal} \right).$$

Do discreto ao contínuo

O polinômio característico da matriz de adjacência da bola de futebol é

$$(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda+1)^3(\lambda^4-3\lambda^3-2\lambda^2+7\lambda+1)^3(\lambda^2+\lambda-4)^4(\lambda^2-\lambda-3)^5(\lambda^2+\lambda-1)^5(\lambda+2)^4(\lambda-1)^9.$$

O polinômio característico da matriz de adjacência do fullereno (C_{60}) é

$$(\lambda-4)(\lambda^2+5\lambda+5)^3(\lambda^4-3\lambda^3-7\lambda^2+12\lambda+16)^3(\lambda^2+\lambda-9)^4(\lambda^2+\lambda-5)^4(\lambda^2+\lambda-3)^5(\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+8)^5.$$

Considere em vez funções no círculo parametrizado por $[-\pi, \pi]$. Então

$$f(x) = \dots + c_{-1} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + c_{+1} \frac{e^{+ix}}{\sqrt{2\pi}} + \dots,$$

onde

$$c_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \left(\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ é uma "base" ortonormal} \right).$$

O que fazer com funções definidas em uma esfera?

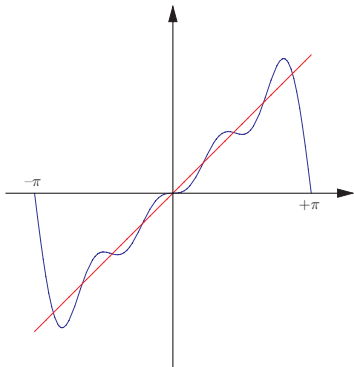
Além de PG's e Pitágoras

$$x = \dots - \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}} + i \sqrt{2\pi} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + 0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - i \sqrt{2\pi} \frac{e^{+ix}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{+2ix}}{\sqrt{2\pi}} + \dots$$

$$\begin{aligned}x &= \cdots - \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}} + i \sqrt{2\pi} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + 0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - i \sqrt{2\pi} \frac{e^{+ix}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{+2ix}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots \\ &= \frac{2}{1} \text{sen}(x) - \frac{2}{2} \text{sen}(2x) + \frac{2}{3} \text{sen}(3x) - \frac{2}{4} \text{sen}(4x) + \cdots, \quad x \in (-\pi, \pi).\end{aligned}$$

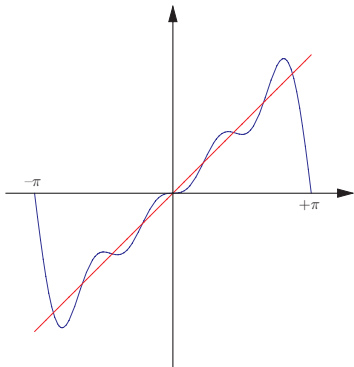
Além de PG's e Pitágoras

$$\begin{aligned}x &= \dots - \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}} + i \sqrt{2\pi} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + 0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - i \sqrt{2\pi} \frac{e^{+ix}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{+2ix}}{\sqrt{2\pi}} + \dots \\ &= \frac{2}{1} \text{sen}(x) - \frac{2}{2} \text{sen}(2x) + \frac{2}{3} \text{sen}(3x) - \frac{2}{4} \text{sen}(4x) + \dots, \quad x \in (-\pi, \pi).\end{aligned}$$



Além de PG's e Pitágoras

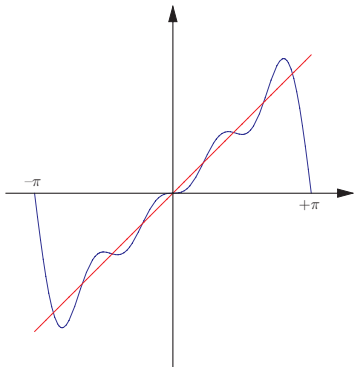
$$\begin{aligned}x &= \dots - \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}} + i \sqrt{2\pi} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + 0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - i \sqrt{2\pi} \frac{e^{+ix}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{+2ix}}{\sqrt{2\pi}} + \dots \\ &= \frac{2}{1} \text{sen}(x) - \frac{2}{2} \text{sen}(2x) + \frac{2}{3} \text{sen}(3x) - \frac{2}{4} \text{sen}(4x) + \dots, \quad x \in (-\pi, \pi).\end{aligned}$$



$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Além de PG's e Pitágoras

$$\begin{aligned}x &= \dots - \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}} + i \sqrt{2\pi} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + 0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - i \sqrt{2\pi} \frac{e^{+ix}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{+2ix}}{\sqrt{2\pi}} + \dots \\ &= \frac{2}{1} \text{sen}(x) - \frac{2}{2} \text{sen}(2x) + \frac{2}{3} \text{sen}(3x) - \frac{2}{4} \text{sen}(4x) + \dots, \quad x \in (-\pi, \pi).\end{aligned}$$



$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Quantificando suavidade: Sobolev

Quantificando suavidade: Sobolev

Se $f: [-\pi, +\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função limitada

Quantificando suavidade: Sobolev

Se $f: [-\pi, +\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função limitada, então

$$|a_n| = \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)| dx \leq C.$$

Quantificando suavidade: Sobolev

Se $f: [-\pi, +\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função limitada, então

$$|a_n| = \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)| dx \leq C.$$

Mas, se f tem derivadas no círculo ...

Quantificando suavidade: Sobolev

Se $f: [-\pi, +\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função limitada, então

$$|a_n| = \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)| dx \leq C.$$

Mas, se f tem derivadas no círculo ...

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f'(x) \frac{e^{-inx}}{(-in)} dx \right| \leq \dots \leq \\ &\leq \dots \leq \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(k)}(x) \frac{e^{-inx}}{(-in)^k} dx \right| \leq \frac{C}{n^k}. \end{aligned}$$

Quantificando suavidade: Sobolev

Se $f: [-\pi, +\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função limitada, então

$$|a_n| = \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)| dx \leq C.$$

Mas, se f tem derivadas no círculo ...

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f'(x) \frac{e^{-inx}}{(-in)} dx \right| \leq \dots \leq \\ &\leq \dots \leq \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(k)}(x) \frac{e^{-inx}}{(-in)^k} dx \right| \leq \frac{C}{n^k}. \end{aligned}$$

Sinais suaves compactam mais.

Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Uma “base” $f_{ij}(x) = f(2^j(x - i))$, $i, j \in \mathbb{Z}$, a partir de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave?!

Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Uma “base” $f_{ij}(x) = f(2^j(x - i))$, $i, j \in \mathbb{Z}$, a partir de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *suave*?!

(Um grupo age, gerado pelas *translações por 1* e *mudanças de escala de 1/2*.)

Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Uma “base” $f_{ij}(x) = f(2^j(x - i))$, $i, j \in \mathbb{Z}$, a partir de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *suave*?!

(Um grupo age, gerado pelas *translações por 1* e *mudanças de escala de 1/2*.)

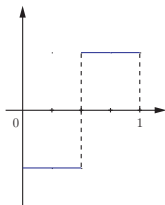
Algo quase assim (Haar):

Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Uma “base” $f_{ij}(x) = f(2^j(x - i))$, $i, j \in \mathbb{Z}$, a partir de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave?!

(Um grupo age, gerado pelas *translações por 1* e *mudanças de escala de 1/2*.)

Algo quase assim (Haar):

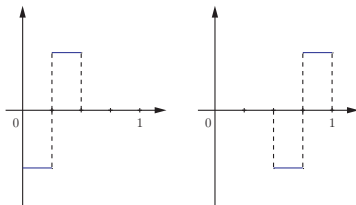


Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Uma “base” $f_{ij}(x) = f(2^j(x - i))$, $i, j \in \mathbb{Z}$, a partir de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave?!

(Um grupo age, gerado pelas *translações por 1* e *mudanças de escala de 1/2*.)

Algo quase assim (Haar):

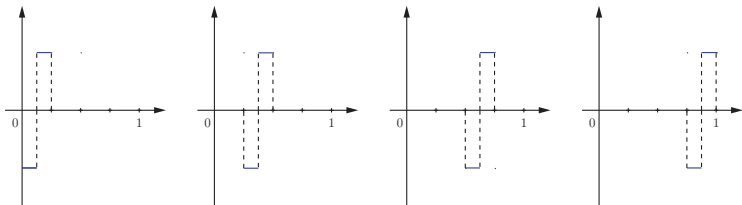


Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Uma “base” $f_{ij}(x) = f(2^j(x - i))$, $i, j \in \mathbb{Z}$, a partir de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *suave*?!

(Um grupo age, gerado pelas *translações por 1* e *mudanças de escala de 1/2*.)

Algo quase assim (Haar):

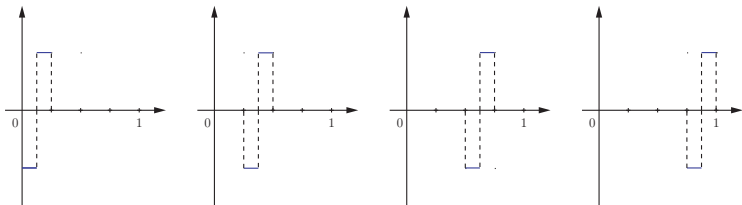


Será que é possível *localizar* uma “base” ortogonal em posição e freqüência?

Uma “base” $f_{ij}(x) = f(2^j(x - i))$, $i, j \in \mathbb{Z}$, a partir de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave?!

(Um grupo age, gerado pelas *translações por 1* e *mudanças de escala de 1/2*.)

Algo quase assim (Haar):



Wavelets respondem à pergunta original. E fazem muito mais!