

**SUPERFÍCIES QUÁDRICAS**  
Notas de aula - professora Marlene

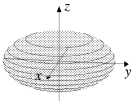

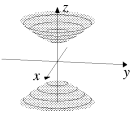
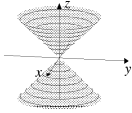
**As formas canônicas da equação de 2<sup>o</sup>. grau a três variáveis**

Para facilitar a compreensão, as formas canônicas estão agrupadas em 3 tipos de equações (I, II e III).

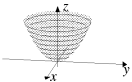
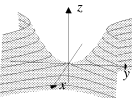
Seja  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x, y \text{ e } z \text{ satisfazem a equação canônica dada}\}$  o conjunto solução da equação. Ver procedimento para identificar as representações geométricas deste conjunto solução, após a descrição de todas as formas canônicas.

(I) Aparecem as três variáveis

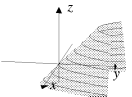
(I.a) Os coeficientes de  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$  são todos não nulos.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  |    | <i>elipsóide</i> ( $a, b$ e $c$ não iguais) <i>esfera</i> ( $a = b = c$ ) |
| 2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ | $\emptyset$   |   |
| 3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  |    | <i>hiperbolóide de uma folha</i>  |
| 4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ |   | <i>hiperbolóide de duas folhas</i>  |
| 5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  |  | <i>cone de duas folhas</i>  |
| 6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$  | $(0, 0, 0)$   | <i>ponto</i>  |

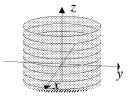
(I.b) Apenas um dos coeficientes de  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$  é nulo.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - cz = 0$ |  | <i>parabolóide elíptico</i> ( $a \neq b$ ) <i>parabolóide circular</i> ( $a = b$ ) |
| 8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0$ |  | <i>parabolóide hiperbólico (sela)</i>  |

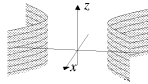
(I.c) Um dos coeficientes de  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$  não é nulo e os outros dois são nulos.

- |                                    |   |                         |
|------------------------------------|---|-------------------------|
| 9. $\frac{x^2}{a^2} - by - cz = 0$ |  | <i>calha parabólica</i> |
|------------------------------------|---|-------------------------|

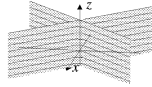
(II) Aparecem apenas duas das variáveis.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  |  | <i>cilindro elíptico</i> ( $a \neq b$ ) <i>cilindro circular</i> ( $a = b$ ) |
| 11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ | $\emptyset$   |  |
| 12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  | eixo $z$  | <i>reta</i>  |

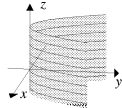
13.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

*cilindro hiperbólico*

14. item  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

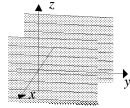
*par de planos concorrentes em uma reta*

15.  $y^2 - cx = 0$

*cilindro parabólico*

(III) Aparece apenas uma variável

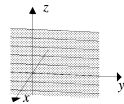
16.  $x^2 - a^2 = 0$

*par de planos paralelos*

17.  $x^2 + a^2 = 0$

 $\emptyset$ 

18.  $x^2 = 0$

*um só plano*

**OBSERVAÇÃO:** As equações dos grupos (I) e (II) serão as mais usadas. As equações 2, 11 e 17 não admitem solução. As equações 6 e 12 apresentam soluções que não são superfícies, são chamadas de soluções degeneradas.

### Procedimento para identificar a superfície que uma equação do 2º grau representa.

i) Dada uma equação qualquer do 2º grau, após algum manuseio algébrico, a equação recairá numa das formas canônicas no novo sistema de coordenadas.

A primeira etapa é completar os quadrados. Por exemplo, se na equação aparece  $x^2 + x$ , após completar o quadrado,  $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ . Chame  $\left(x + \frac{1}{2}\right) = x'$ , que é uma translação paralela ao eixo  $x$  de  $-\frac{1}{2}$ . Se na equação aparece algum termo retangular, a saber  $xy$ ,  $xz$  ou  $yz$ , há uma rotação de um plano coordenado em relação ao eixo coordenado que não está neste plano. Por exemplo, a ocorrência do termo  $yz$ , corresponde a uma rotação do plano  $yz$  em torno do eixo  $x$ .

ii) Depois que a equação está em uma das formas canônicas, o primeiro passo é verificar se é uma das formas degeneradas, facilmente reconhecíveis. A seguir, identificar se é um plano ou par de planos, isto é, identificar se a equação cai em uma ou duas equações de 1º grau.

Se não é degenerada, nem plano ou planos, para reconhecer a superfície que a equação representa, uma ou mais de uma das seguintes etapas são recomendadas.

- Interseção com os eixos coordenados  
(interseção com o eixo  $x$ :  $y = z = 0$ , obtém-se  $x$ ); (interseção com o eixo  $y$ :  $x = z = 0$ , obtém-se  $y$ ); (interseção com o eixo  $z$ :  $x = y = 0$ , obtém-se  $z$ )
- Interseção com os planos coordenados  
(interseção com o plano  $xy$ :  $z=0$ , obtém-se uma equação em  $x$  e  $y$ , que é uma curva no plano  $xy$ );  
(interseção com o plano  $xz$ :  $y=0$ , obtém-se uma equação em  $x$  e  $z$ , que é uma curva no plano  $xz$ );  
(interseção com o plano  $yz$ :  $x=0$ , obtém-se uma equação em  $y$  e  $z$ , que é uma curva no plano  $yz$ );
- Interseção com planos paralelos aos planos coordenados  
(para cada  $k$ , interseção com o plano paralelo ao plano  $xy$ :  $z = k$ , obtém-se uma equação em  $x$  e  $y$ , que é uma curva no plano  $z = k$ );  
(para cada  $k$ , interseção com o plano paralelo ao plano  $xz$ :  $y = k$ , obtém-se uma equação em  $x$  e  $z$ , que é uma curva no plano  $y = k$ );  
(para cada  $k$ , interseção com o plano paralelo ao plano  $yz$ :  $x = k$ , obtém-se uma equação em  $y$  e  $z$ , que é uma curva nos planos  $x = k$ );
- Para cada  $a$ ,  $y = ax$  é um plano vertical contendo a origem. Se fazemos  $x = t$  e  $y = at$ , obtém-se uma equação em  $z$  e  $t$ , que é uma curva no plano vertical.

Exemplos: serão vistos em aula.

Exercícios: para cada forma canônica, escolha valores para as constantes e siga o procedimento para concluir que a superfície é de fato do tipo da que está esboçada.