Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 1

28 de agosto de 2007

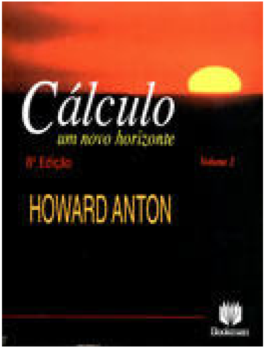
Apresentação do curso

Conteúdo do curso

- Funções de uma variável real.
- Limites.
- Continuidade.
- Derivadas.
- Estudo da variação de funções.
- Antiderivação.

Bibliografia

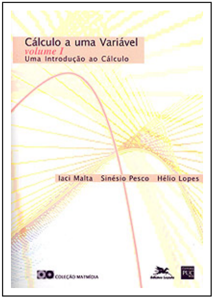
Howard Anton. Cálculo – Um Novo Horizonte, volume 1, Sexta edição, Editora Bookman, 2000.

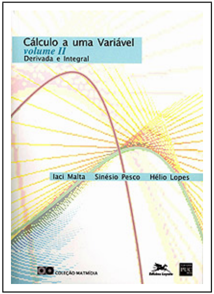


Bibliografia

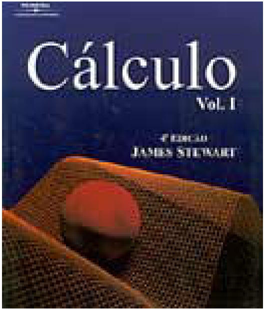
Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes. Cálculo a Uma Variável, volume 1: Uma Introdução ao Cálculo. Editora PUC-Rio, 2002.

Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes. Cálculo a Uma Variável, volume 2: Derivada e Integral. Editora PUC-Rio, 2002.





James Stewart. Cálculo, volume 1, Quarta edição, Editora Pioneira, 2001.



Outras informações

- Página WEB do curso: http://www.professores.uff.br/hjbortol/.
  Clique no link DISCIPLINAS no menu à esquerda.

  Conteúdo: cronograma dia a dia, lista de execícios, material extra, notas das provas.

- Não deixe de consultar os horários de monitoria no GMA.

- Vamos definir agora um horário de atendimento para esta turma.

Outras informações

- Página WEB do curso: http://www.professores.uff.br/hjbortol/.
  Clique no link DISCIPLINAS no menu à esquerda.

  Conteúdo: cronograma dia a dia, lista de execícios, material extra, notas das provas.

- Não deixe de consultar os horários de monitoria no GMA.

- Vamos definir agora um horário de atendimento para esta turma.

Outras informações

- Página WEB do curso: http://www.professores.uff.br/hjbortol/.
  Clique no link DISCIPLINAS no menu à esquerda.

  Conteúdo: cronograma dia a dia, lista de execícios, material extra, notas das provas.

- Não deixe de consultar os horários de monitoria no GMA.

- Vamos definir agora um horário de atendimento para esta turma.

Revisão: desigualdades

Um primeiro exemplo

Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$2\,x - 4 > 0.$$

$$2\,x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$$

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2, +\infty[= (2, +\infty).$

Um primeiro exemplo

Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$2\,x - 4 > 0.$$

$$2\,x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$$

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2, +\infty[= (2, +\infty)$.

Um primeiro exemplo

Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$2\,x - 4 > 0.$$

$$2\,x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$$

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2, +\infty[= (2, +\infty)$.

Outro exemplo

Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\frac{2\,x - 6}{x - 1} < 1.$$

CUIDADO!

$$\frac{2\,x-6}{x-1} < 1 \quad \overset{\text{AQUI!}}{\Leftrightarrow} \quad 2\,x - 6 < x - 1 \;\Leftrightarrow\; 2\,x - x < -1 + 6 \;\Leftrightarrow\; x < 5$$

Existe algo errado neste desenvolvimento?

Outro exemplo

Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1.$$

CUIDADO!

AQUI!

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-6 < x-1 \;\Leftrightarrow\; 2x - x < -1 + 6 \;\Leftrightarrow\; x < 5$$

Existe algo errado neste desenvolvimento? Sim!

Outro exemplo

Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1.$$

CUIDADO!

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \quad \overset{\text{AQUI!}}{\Leftrightarrow} \quad 2x-6 < x-1 \;\Leftrightarrow\; 2x-x < -1+6 \;\Leftrightarrow\; x < 5$$

Existe algo errado neste desenvolvimento? Sim!

Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1.$$

CUIDADO!

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \overset{\text{AQUI!}}{\Leftrightarrow} 2x-6 < x-1 \Leftrightarrow 2x - x < -1 + 6 \Leftrightarrow x < 5$$

Existe algo errado neste desenvolvimento? Sim!

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{x-1} < 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

Estudo do sinal

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \iff \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \iff \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \iff \frac{x-5}{x-1} < 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

Estudo do sinal

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{x-1} < 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

Estudo do sinal

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{x-1} < 0$$

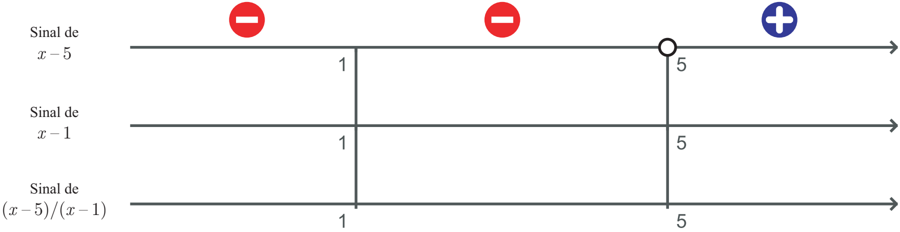
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{x-1} < 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

Estudo do sinal

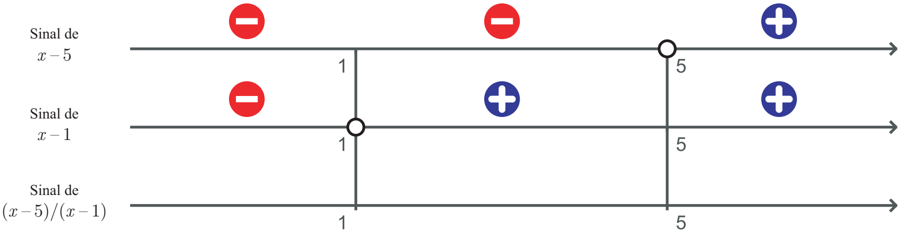
$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-1} < 0$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

Estudo do sinal

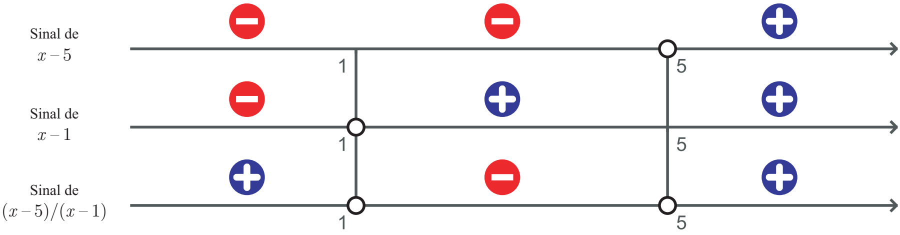
$$\frac{2\,x-6}{x-1} < 1 \iff \frac{2\,x-6}{x-1} - 1 < 0 \iff \frac{2\,x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \iff \frac{x-5}{x-1} < 0$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

Estudo do sinal

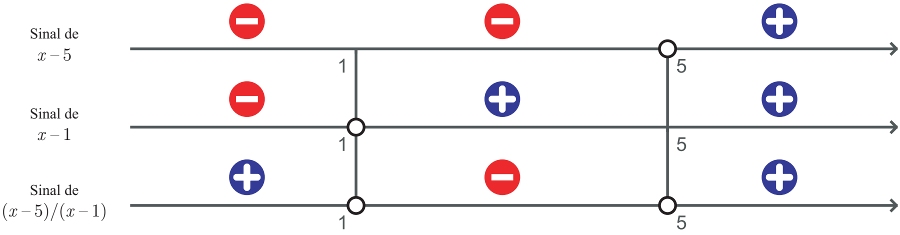
$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \iff \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \iff \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \iff \frac{x-5}{x-1} < 0$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

Estudo do sinal

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-1} < 0$$

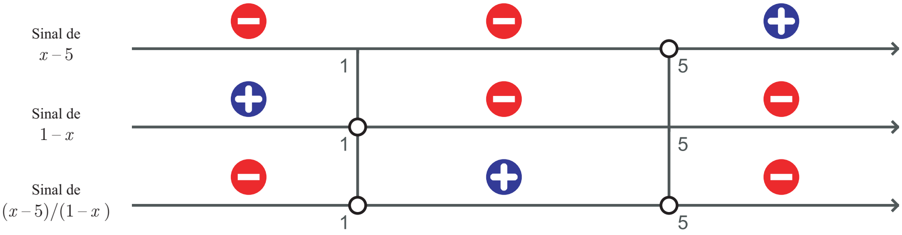


$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5).$$

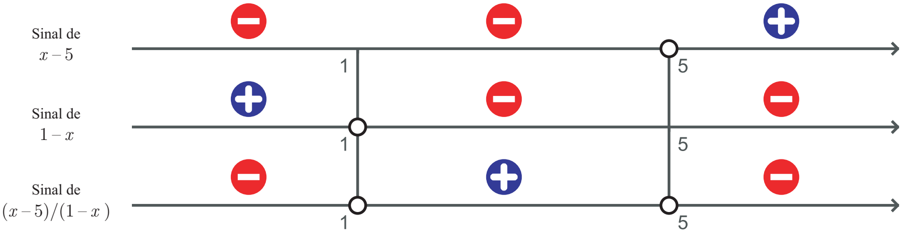
Estudo do sinal

$$\frac{x-5}{1-x} < 0$$

$$\frac{x-5}{1-x} < 0$$



$$\frac{x-5}{1-x} < 0$$



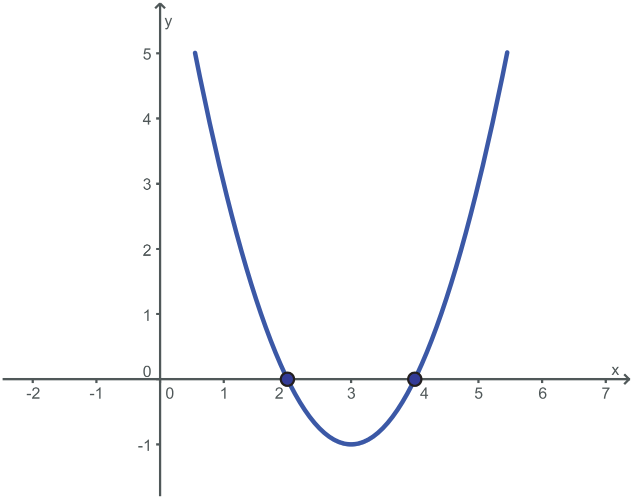
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 5\} =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[= (-\infty, 1) \cup (5, +\infty).$$

Desigualdades envolvendo expressões quadráticas

$$x^2 - 6\,x + 8 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$$

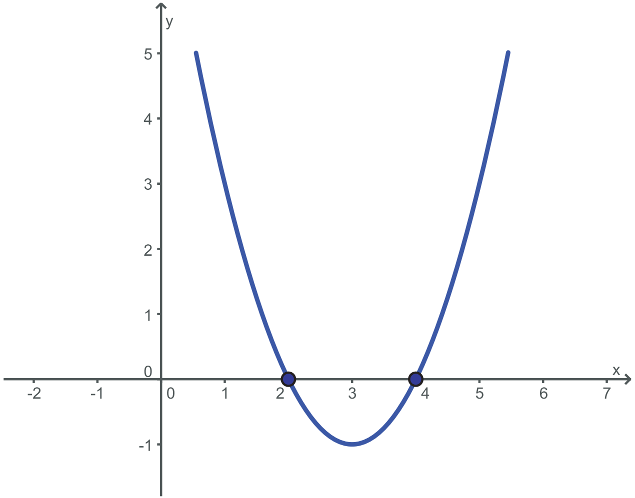
Desigualdades envolvendo expressões quadráticas

$x^2 - 6\,x + 8 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$



Desigualdades envolvendo expressões quadráticas

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$$



Desigualdades envolvendo expressões quadráticas

$$\frac{x^2 - 6\,x + 8}{x - 5} \leq 0 \quad \overset{\text{(Exercício)}}{\Leftrightarrow} \quad x \in S =]-\infty, 2] \,\cup\, [4, 5[$$

Desigualdades envolvendo expressões quadráticas

$$\frac{x^2 - 6\,x + 8}{x - 5} \leq 0 \quad \overset{\text{(Exercício)}}{\Leftrightarrow} \quad x \in S =]-\infty, 2] \;\cup\; [4, 5[$$

Desigualdades envolvendo expressões quadráticas

(Exercício)

$$\frac{x^2 - 6\,x + 8}{x - 5} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in S =]-\infty, 2] \;\cup\; [4, 5[$$

Desigualdades envolvendo expressões quadráticas

Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - x + 1 < 0$, isto é, $S = \emptyset$.

(Note que $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = -3 < 0$)

$$x^2 + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in S = \mathbb{R}$$

(Note que $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = -4 < 0$)

Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - x + 1 < 0$, isto é, $S = \emptyset$.

(Note que $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = -3 < 0$)

$$x^2 + 1 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in S = \mathbb{R}$$

(Note que $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = -4 < 0$)

Revisão: o módulo de um número real

O módulo de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

O módulo de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

O módulo de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

O módulo de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

O módulo de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

O módulo de um número real

Definição

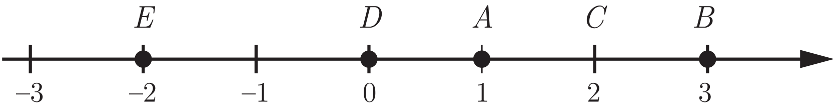
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

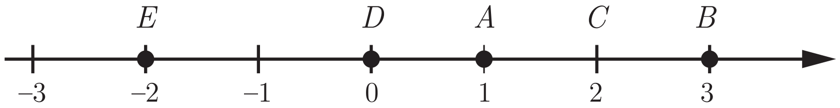
$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Interpretação geométrica

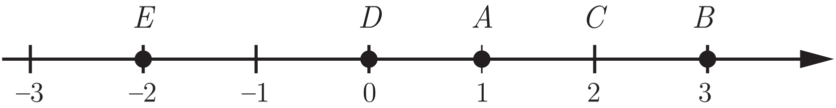


$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) = +1$ $\quad$ $d(B, E) = +5$ $\quad$ $d(D, E) = +2$

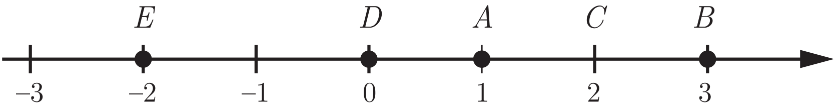


$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) = +1$ $\quad$ $d(B, E) = +5$ $\quad$ $d(D, E) = +2$

Interpretação geométrica

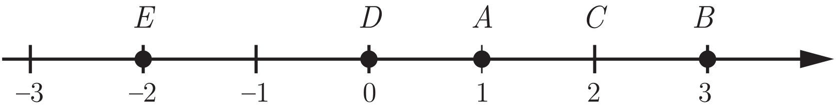


$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) = +1$ $\quad$ $d(B, E) = +5$ $\quad$ $d(D, E) = +2$



$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) = +1$ $\quad$ $d(B, E) = +5$ $\quad$ $d(D, E) = +2$

Interpretação geométrica



$d(A, B) = \color{red}{+2}$ $\quad$ $d(B, C) = \color{red}{+1}$ $\quad$ $d(B, E) = \color{red}{+5}$ $\quad$ $d(D, E) = \color{red}{+2}$

Interpretação geométrica

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases} = |b-a|.$$

Moral: $|b-a|$ representa a distância entre os números a e b na reta numérica.

Interpretação geométrica

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases} = |b-a|.$$

Moral: $|b-a|$ representa a distância entre os números a e b na reta numérica.

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases} = |b-a|.$$

Moral: $|b-a|$ representa a distância entre os números a e b na reta numérica.

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases} = |b-a|.$$

Moral: $|b-a|$ representa a distância entre os números a e b na reta numérica.

Duas propriedades importantes

$$|p| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < p < a$$

$$|p| > a \quad \Leftrightarrow \quad p < -a \ \text{ ou } \ p > a$$

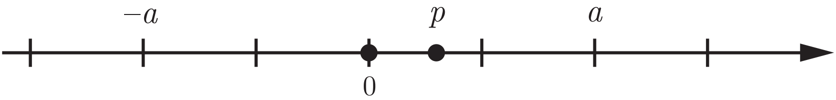
Para justificar estas propriedades,
lembre-se que $|p| = |p - 0|$ é a distância entre p e 0.

Duas propriedades importantes

$$|p| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < p < a$$

$$|p| > a \quad \Leftrightarrow \quad p < -a \text{ ou } p > a$$

Para justificar estas propriedades,
lembre-se que $|p| = |p - 0|$ é a distância entre p e 0.



Aplicação

Resolva a desigualdade $|3+2x| < 2$.

$$\underbrace{|3+2x|}_{p} < 2 \iff -2 < \underbrace{3+2x}_{p} < 2 \iff -2-3 < 2x < 2-3$$

$$\iff -5 < 2x < -1 \iff -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left] -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2x| < 2$.

$$|\underbrace{3 + 2x}_{p}| < 2 \Leftrightarrow -2 < \underbrace{3 + 2x}_{p} < 2 \Leftrightarrow -2 - 3 < 2x < 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow -5 < 2x < -1 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left] -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2x| < 2$.

$$|\underbrace{3+2x}_{p}| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \underbrace{3+2x}_{p} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2-3 < 2x < 2-3$$

$$\Leftrightarrow \quad -5 < 2x < -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left] -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2\,x| < 2$.

$$|\underbrace{3 + 2\,x}_{p}| < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 < \underbrace{3 + 2\,x}_{p} < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 - 3 < 2\,x < 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow\; -5 < 2\,x < -1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3+2\,x| < 2$.

$$\big|\underbrace{3+2\,x}_{p}\big| < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 < \underbrace{3+2\,x}_{p} < 2 \;\Leftrightarrow\; -2-3 < 2\,x < 2-3$$

$$\Leftrightarrow\; -5 < 2\,x < -1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2x| < 2$.

$$|\underbrace{3+2x}_{p}| < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 < \underbrace{3+2x}_{p} < 2 \;\Leftrightarrow\; -2-3 < 2x < 2-3$$

$$\Leftrightarrow\; -5 < 2x < -1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3+2x| < 2$.

$$|\underbrace{3+2x}_{p}| < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 < \underbrace{3+2x}_{p} < 2 \;\Leftrightarrow\; -2-3 < 2x < 2-3$$

$$\Leftrightarrow\; -5 < 2x < -1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -8 \quad \text{ou} \quad 2x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x+5|>3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2\,x+5}_{p}|>3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2\,x+5}_{p}<-3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2\,x+5}_{p}>3\\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x<-3-5 \quad \text{ou} \quad 2\,x>3-5\\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x<-8 \quad \text{ou} \quad 2\,x>-2\\
&\Leftrightarrow \quad x<-4 \quad \text{ou} \quad x>-1
\end{aligned}
$$

$$S=]-\infty,-4[\,\cup\,]-1,+\infty[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -8 \quad \text{ou} \quad 2x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\, \cup \,]-1, +\infty[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -8 \quad \text{ou} \quad 2x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2\,x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2\,x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < -8 \quad \text{ou} \quad 2\,x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -8 \quad \text{ou} \quad 2x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$$

Resolva a desigualdade $|2x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -8 \quad \text{ou} \quad 2x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\,\cup\,]-1, +\infty[$$

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} =$

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$. CUIDADO!

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$ CUIDADO!

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.

- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$. CUIDADO!

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.

- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.

- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

- $\sqrt{x^2} = |x|$.

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$. CUIDADO!

Outras propriedades do módulo

- $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.

CUIDADO!

Revisão: funções

Funções reais

Definição

Uma função real f é uma lei a qual para cada elemento x em um subconjunto D de $\mathbb{R}$ faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um subconjunto C de $\mathbb{R}$.

D é denominado de domínio e C de contradomínio da função f.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2x \end{array}$$

Definição

Uma função real f é uma lei a qual para cada elemento x em um subconjunto D de $\mathbb{R}$ faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um subconjunto C de $\mathbb{R}$.

D é denominado de domínio e C de contradomínio da função f.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

Exemplo

Exemplo

$$
\begin{array}{rccl}
f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x
\end{array}
$$

$f(0) = 0,\qquad f(2) = 4,\qquad f(a+b) = 2\,(a+b),\qquad f(\square) = 2\,\square.$

Exemplo

Exemplo

$$
\begin{array}{rccl}
f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x
\end{array}
$$

$$
f(0) = 0, \qquad f(2) = 4, \qquad f(a+b) = 2\,(a+b), \qquad f(\square) = 2\,\square.
$$

Exemplo

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$$f(0) = 0, \qquad f(2) = 4, \qquad f(a+b) = 2\,(a+b), \qquad f(\square) = 2\,\square.$$

Exemplo

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$$f(0) = 0, \qquad f(2) = 4, \qquad f(a+b) = 2\,(a+b), \qquad f(\square) = 2\,\square.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$$f(0) = 0, \qquad f(2) = 4, \qquad f(a+b) = 2\,(a+b), \qquad f(\square) = 2\,\square.$$

Definição

A imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$$\text{Imagem de } f = \mathbb{R}$$

Definição

A imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$$\text{Imagem de } f = \mathbb{R}$$

Definição

A imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$$\text{Imagem de } f = \mathbb{R}$$

Imagem de uma função real

Definição

A imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} g\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = x^2 \end{array}$$

$$\text{Imagem de } g = [0, +\infty)$$

Imagem de uma função real

Definição

A imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = x^2 \end{array}$$

$$\text{Imagem de } g = [0, +\infty)$$

Imagem de uma função real

Definição

A imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

Imagem de $h = [-1, +1]$

Definição

A imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

$$\text{Imagem de } h = [-1, +1]$$

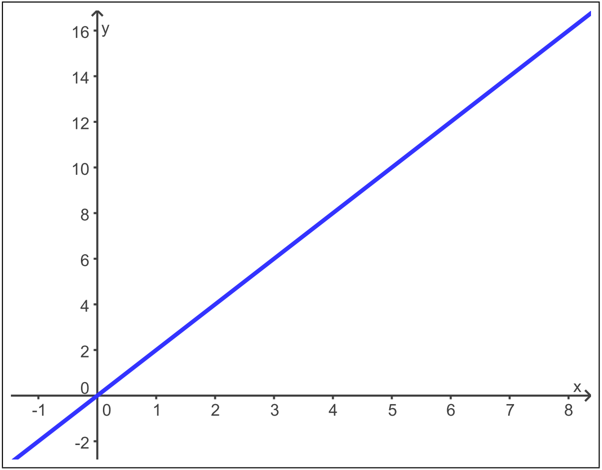
Definição

O gráfico de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \in D$ e $y = f(x)$:

$$\text{Gráfico de } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \text{ e } y = f(x)\}.$$

Gráfico de uma função real

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array}$$



$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array}$$

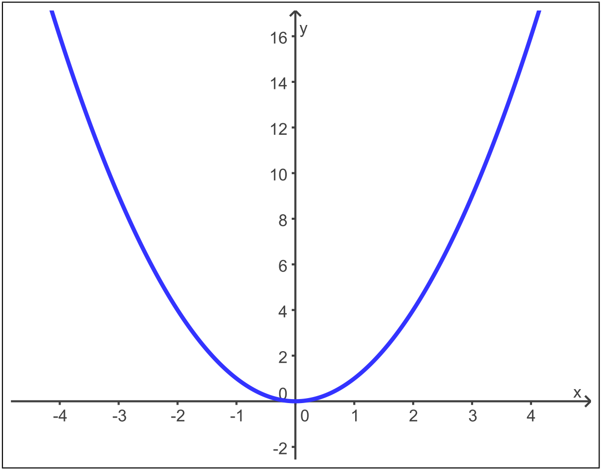
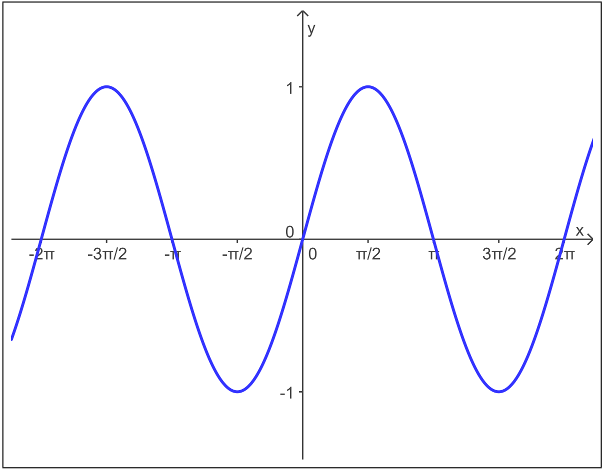


Gráfico de uma função real

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$



Convenção

Quando uma função real é definida apenas pela sua lei de associação, convenciona-se que o seu domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual é possível avaliar a função.

Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

O domínio maximal de f é $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Domínio maximal

Convenção

Quando uma função real é definida apenas pela sua lei de associação, convenciona-se que o seu domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual é possível avaliar a função.

$$\text{Exemplo: } f(x) = \frac{1}{x}.$$

O domínio maximal de f é $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Convenção

Quando uma função real é definida apenas pela sua lei de associação, convenciona-se que o seu domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual é possível avaliar a função.

Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

O domínio maximal de f é $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$\begin{aligned}
|x| - x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| > x \\
&\Leftrightarrow \quad x < -x \quad \text{ou} \quad x > x \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < 0 \quad \text{ou} \quad x - x > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0
\end{aligned}$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$
\begin{aligned}
|x| - x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| > x \\
&\Leftrightarrow \quad x < -x \quad \text{ou} \quad x > x \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < 0 \quad \text{ou} \quad x - x > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0
\end{aligned}
$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$
\begin{aligned}
|x| - x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| > x \\
&\Leftrightarrow \quad x < -x \quad \text{ou} \quad x > x \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < 0 \quad \text{ou} \quad x - x > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0
\end{aligned}
$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$
\begin{array}{rcccc}
|x| - x > 0 & \Leftrightarrow & |x| > x & & \\
 & \Leftrightarrow & x < -x & \text{ou} & x > x \\
 & \Leftrightarrow & 2x < 0 & \text{ou} & x - x > 0 \\
 & \Leftrightarrow & x < 0 & \text{ou} & 0 > 0 \\
 & \Leftrightarrow & x < 0 & &
\end{array}
$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$
\begin{aligned}
|x| - x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| > x \\
&\Leftrightarrow \quad x < -x \quad \text{ou} \quad x > x \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < 0 \quad \text{ou} \quad x - x > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 0
\end{aligned}
$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$
\begin{array}{rclcc}
|x| - x > 0 & \Leftrightarrow & |x| > x & & \\
 & \Leftrightarrow & x < -x & \text{ou} & x > x \\
 & \Leftrightarrow & 2\,x < 0 & \text{ou} & x - x > 0 \\
 & \Leftrightarrow & x < 0 & \text{ou} & 0 > 0 \\
 & \Leftrightarrow & x < 0 & &
\end{array}
$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$
\begin{array}{rclcc}
|x| - x > 0 & \Leftrightarrow & |x| > x & & \\
& \Leftrightarrow & x < -x & \text{ou} & x > x \\
& \Leftrightarrow & 2\,x < 0 & \text{ou} & x - x > 0 \\
& \Leftrightarrow & x < 0 & \text{ou} & 0 > 0 \\
& \Leftrightarrow & x < 0 & &
\end{array}
$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Domínio maximal

Qual é o domínio maximal de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$?

$$
\begin{array}{rclcc}
|x| - x > 0 & \Leftrightarrow & |x| > x & & \\
& \Leftrightarrow & x < -x & \text{ou} & x > x \\
& \Leftrightarrow & 2\,x < 0 & \text{ou} & x - x > 0 \\
& \Leftrightarrow & x < 0 & \text{ou} & 0 > 0 \\
& \Leftrightarrow & x < 0 & &
\end{array}
$$

O domínio maximal de f é $D =]-\infty, 0[$.

Revisão: função par e função ímpar

Função par

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é par se $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

Exemplo de função par:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 1 - x^4 \end{array}.$$

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x).$$

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é par se $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

Exemplo de função par:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 1 - x^4 \end{array}.$$

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x).$$

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é par se $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

Exemplo de função par:

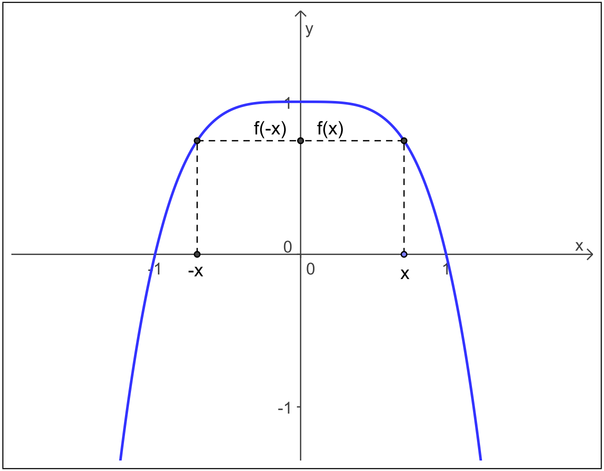
$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 1 - x^4 \end{array}.$$

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x).$$

Função par

O gráfico de uma função par é simétrico com relação ao eixo y!



Função ímpar

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Exemplo de função ímpar:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^5 + x \end{array}.$$

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x).$$

Função ímpar

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

Exemplo de função ímpar:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^5 + x \end{array}.$$

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x).$$

Função ímpar

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Exemplo de função ímpar:

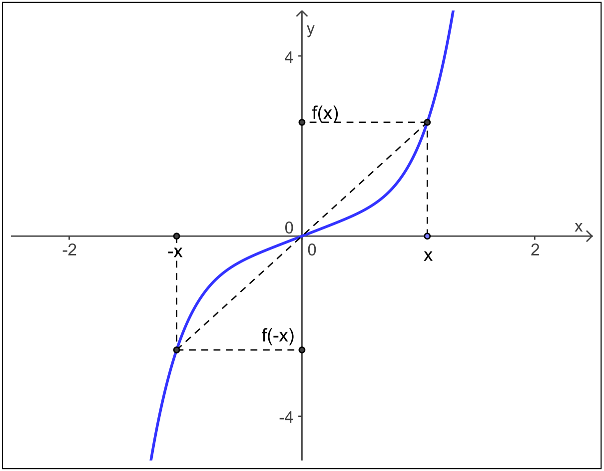
$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^5 + x \end{array}.$$

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x).$$

Função ímpar

O gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem!



Observações

Existem funções que não são pares e nem ímpares:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2 - x^3 \end{array}.$$

De fato:

$$f(-1) = 3 \neq 1 = f(1) \qquad \text{e} \qquad f(-1) = 3 \neq -1 = -f(1).$$

Observações

Existem funções que não são pares e nem ímpares:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2 - x^3 \end{array}.$$

De fato:

$$f(-1) = 3 \neq 1 = f(1) \qquad \text{e} \qquad f(-1) = 3 \neq -1 = -f(1).$$

Observações

Existe um função que seja par e ímpar ao mesmo tempo?

Sim! A função identicamente nula definida em $\mathbb{R}$!

Toda função definida em $\mathbb{R}$ se escreve como soma de uma função para e uma função ímpar:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{ímpar}}.$$

Observações

Existe um função que seja par e ímpar ao mesmo tempo?

Sim! A função identicamente nula definida em $\mathbb{R}$!

Toda função definida em $\mathbb{R}$ se escreve como soma de uma função para e uma função ímpar:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ímpar}}.$$

Existe um função que seja par e ímpar ao mesmo tempo?

Sim! A função identicamente nula definida em $\mathbb{R}$!

Toda função definida em $\mathbb{R}$ se escreve como soma de uma função para e uma função ímpar:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ímpar}}.$$