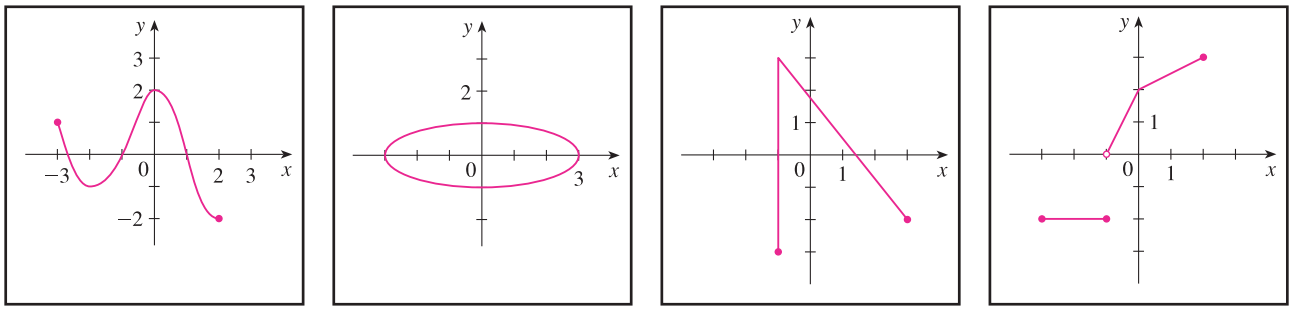
GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I –A–
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

01

Funções reais: domínio, imagem e gráfico

[01] Para cada uma das figuras abaixo, determine se a curva dada é o gráfico de uma função de x. Se for o caso, obtenha o domínio e a imagem da função.



(a) (b) (c) (d)

[02] Para cada uma das funções abaixo, calcule $f(2+h)$, $f(x+h)$ e $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

(a) $f(x) = x - x^2$,

(b) $f(x) = x/(x+1)$.

[03] Determine o domínio natural de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$,

(c) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$,

(d) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$,

(e) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x|-1}}$,

(f) $f(t) = \sqrt{1-t^2} + \sqrt{t^2-1}$,

[04] Encontre o domínio, a imagem e esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

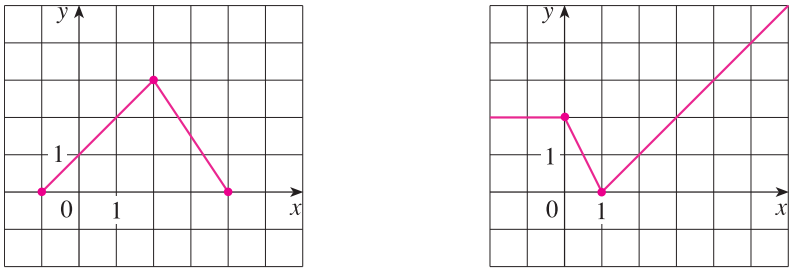
(a) $f(x) = x/2 - 1$,

(b) $f(x) = \dfrac{3\,x + |x|}{x}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0, \\ x+1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$

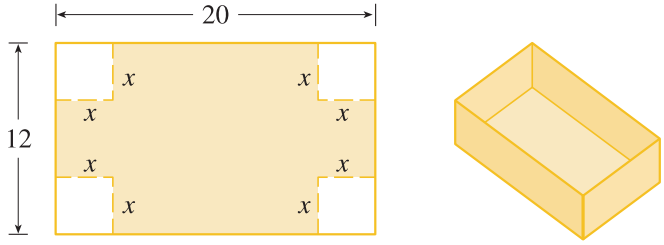
(d) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -1, \\ x^2, & \text{se } x > -1. \end{cases}$

[05] Para cada item abaixo, encontre uma expressão para função cujo gráfico é a curva dada.



(a) (b)

[06] Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 por 20 cm. Deve-se cortar quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.



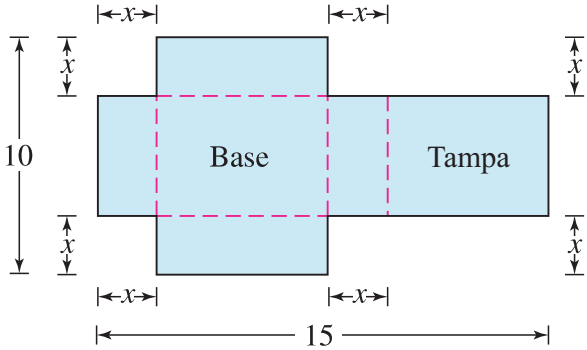
[07] Em um certo país, o imposto de renda é cobrado da seguinte forma: (1) são isentos os que têm rendimento I até R\$ 10 000,00, (2) para qualquer renda I acima de R\$ 10 000,00 e abaixo de R\$ 20 000,00 é cobrado um imposto de 10% sobre a diferença $I -$ R\$ 10 000,00 e (3) acima de R\$ 20 000,00 o imposto é de R\$ 1 000,00 mais 15% sobre a diferença $I -$ R\$ 20 000,00.

(a) Esboce o gráfico do imposto de renda R como uma função da renda I.

(b) Qual é o imposto cobrado sobre um rendimento de R\$ 14 000,00? E sobre R\$ 26 000,00?

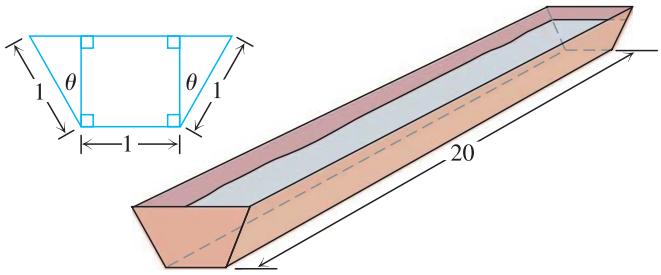
(c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como função da renda I.

[08] Um fabricante quer construir caixas com tampa a partir de uma folha de papelão medindo 10 cm por 15 cm. Para construir a caixa, dois quadrados e dois retângulos são removidos dos cantos da folha de papelão, como indica a figura a seguir.



Encontre uma expressão para o volume $V(x)$ da caixa em função de x.

[09] A gamela na figura abaixo dever se construídas com as dimensões indicadas (em decímetros), apenas o ângulo θ pode variar. Encontre uma expressão para o volume $V(\theta)$ da gamela em função do ângulo θ.



Respostas dos Exercícios

[01] (a) Sim, a curva é gráfico de uma função que depende de x. O domínio da função é o conjunto $[-3, 2\,]$ e sua imagem é o conjunto $[-2, 2]$.

(b) Não, a curva não é gráfico de uma função que depende de x, pois a reta vertical $x = 0$ intercepta a curva em dois pontos.

(c) Não, a curva não é gráfico de uma função que depende de x, pois a reta $x = -1$ intercepta a curva em mais de um ponto (na verdade, em infinitos pontos).

(d) Sim, a curva é gráfico de uma função que depende de x. O domínio da função é o conjunto $[-3, 2\,]$ e sua imagem é o conjunto $\{-2\} \cup (0, 3]$.

[02] (a) Temos que $f(2+h) = -(h^2 + 3\,h + 2)$, $f(x+h) = x + h - x^2 - 2\,xh - h^2$ e

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1 - 2\,x - h.$$

(b) Temos que

$$f(2+h) = \frac{2+h}{3+h}, \quad f(x+h) = \frac{x+h}{x+h+1} \quad \text{e} \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{(x+h+1)\,(x+1)}.$$

[03] (a) Domínio de $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

(b) Domínio de $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$,

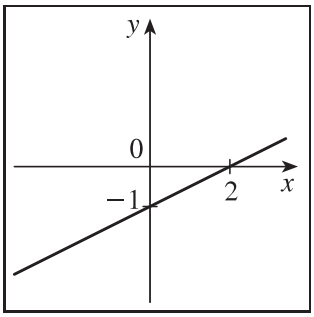
(c) Domínio de $g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$,

(d) Domínio de $f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$,

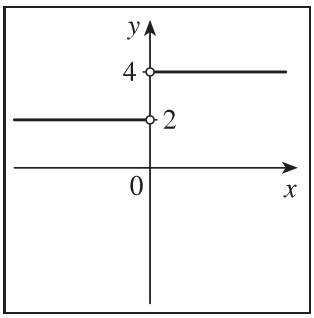
(e) Domínio de $g = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\} = (-\infty - 1) \cup (1, +\infty)$,

(f) Domínio de $f = \{t \in \mathbb{R} \mid t = -1 \text{ ou } t = 1\} = \{-1, 1\}$.

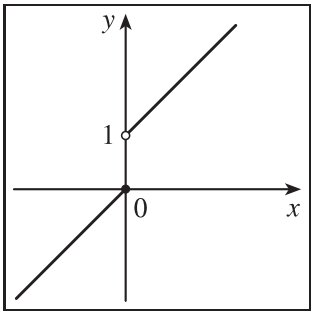
[04] (a) Domínio de $f = \mathbb{R}$, imagem de $f = \mathbb{R}$.



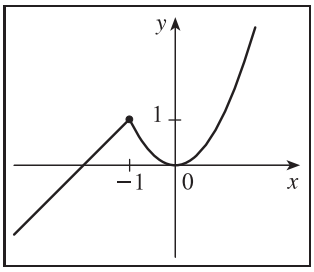
(b) Domínio de $f = \mathbb{R} - \{0\}$, imagem de $f = \{2, 4\}$.



(c) Domínio de $f = \mathbb{R}$, imagem de $f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.



(d) Domínio de $f = \mathbb{R}$, imagem de $f = \mathbb{R}$.

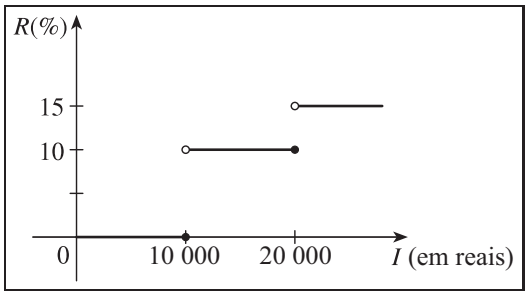


[05] (a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } -1 \leq x \leq 2, \\ 6 - 3\,x/2, & \text{se } 2 < x \leq 4, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 0, \\ 2 - 2\,x \quad , & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

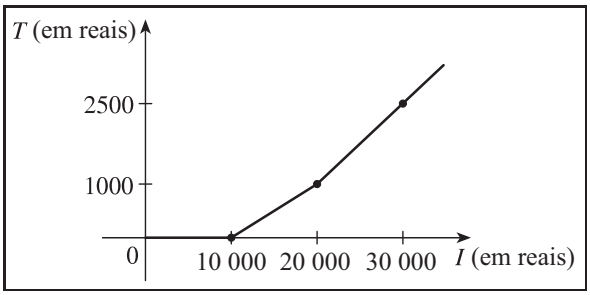
[06] $V(x) = 4\,x^3 - 64\,x^2 + 240\,x$ para $0 \leq x \leq 6$.

[07] (a) O gráfico do imposto de renda R como uma função da renda I é dado abaixo.



(b) R\$ 400,00 e R\$ 1 900,00, respectivamente.

(c) O gráfico do imposto total cobrado T como função da renda I é dado abaixo.



[08] $V(x) = x\,(10 - 2\,x)(15/2 - x)$, para $x \in (0, 5)$.

[09] $V(\theta) = 20\,(\cos(\theta) + cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta))$, para $\theta \in [0, \pi/2)$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 03/08/2008.