DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

PRIMEIRA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi

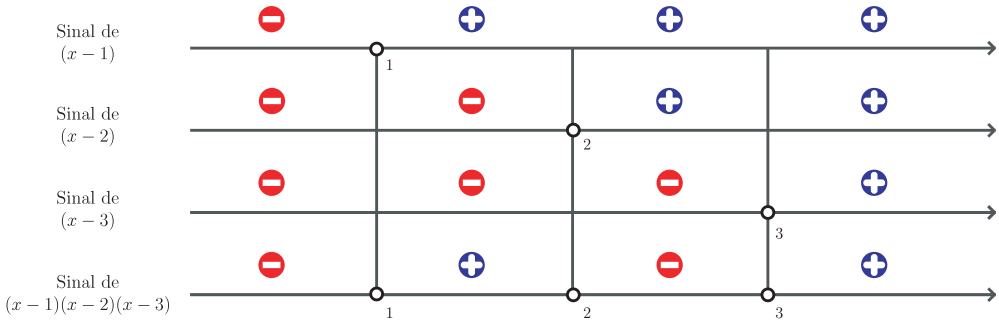
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Nome legível: ____

Assinatura: ____

[01] (1.0) Determine o domínio natural da função $y = f(x) = \dfrac{e^{x^2+2\,x+1}}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$.

Solução. Se x pertence ao domínio natural de f, então $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$. Fazendo o estudo do sinal desta expressão, obtemos o seguinte diagrama:



Desta maneira, o domínio natural da função f é $D = (1, 2) \cup (3, +\infty)$.

[02] (1.0) Considere uma função real f de domínio D e contradomínio C. Quando podemos dizer que f é inversível? Se f for inversível, o que é a inversa de f? Defina estes conceitos!

Solução. Dizemos que $f\colon D \to C$ é inversível se existe uma função $g\colon C \to D$ tal que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in C$ e $g(f(x)) = x$ para todo $x \in D$. Neste caso, a função g é denominada função inversa da função f.

[03] (2.0) Faça um esboço do gráfico de $y = h(x) = 4\,\mathrm{arctg}(-x+1) + 2\,\pi$ a partir do gráfico da função $y = f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ usando alongamentos, compressões, translações e reflexões. Em cada etapa, especifique qual transformação você empregou e faça um esboço do gráfico da função intermediária correspondente, indicando explicitamente as interseções com os eixos coordenados, caso existam.

Solução. Seja $y = f(x) = \mathrm{arctg}(x)$, cujo gráfico é apresentado na Figura 1.

Etapa 1. $y = g_1(x) = f(x+1) = \mathrm{arctg}(x+1)$: o gráfico de g_1 é obtido fazendo-se uma translação horizontal de 1 unidade para a esquerda do gráfico de f (Figura 2).

Etapa 2. $y = g_2(x) = g_1(-x) = \text{arctg}(-x+1)$: o gráfico de g_2 é obtido fazendo-se uma reflexão com relação ao eixo y do gráfico de g_1 (Figura 3).

Etapa 3. $y = g_3(x) = 4\,g_2(x) = 4\ \text{arctg}(-x+1)$: o gráfico de g_3 é obtido fazendo-se um alongamento vertical de fator 4 do gráfico de g_2 (Figura 4).

Etapa 4. $y = h(x) = g_3(x) + 2\,\pi = 4\ \text{arctg}(-x+1) + 2\,\pi$: o gráfico de h é obtido fazendo-se uma translação vertical de $2\,\pi$ unidades para cima do gráfico de g_3 (Figura 5).

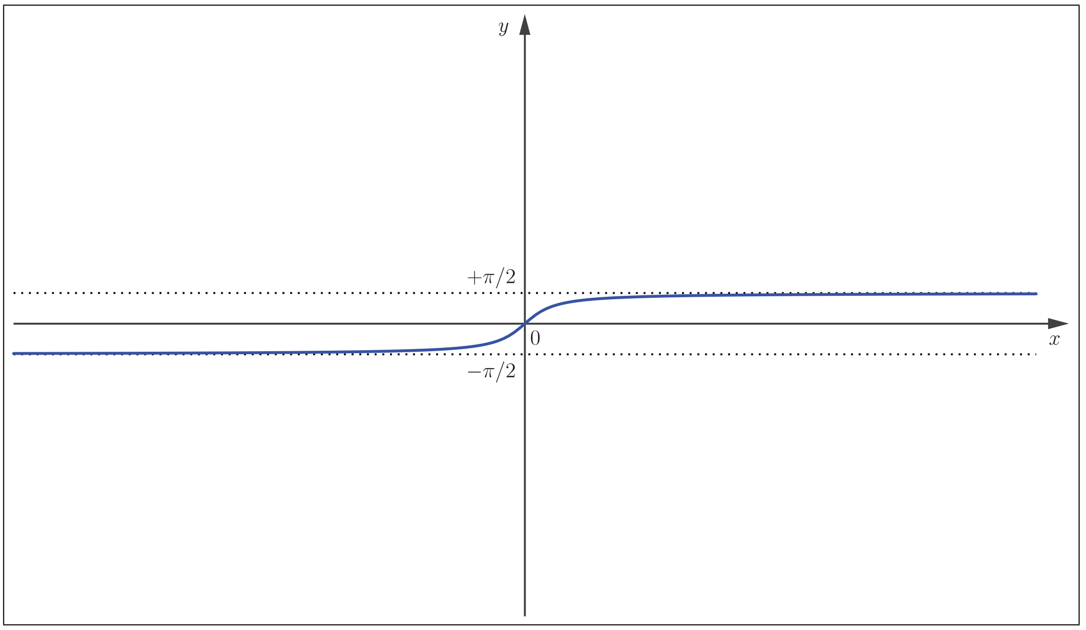


Figura 1: Gráfico de $f(x) = \text{arctg}(x)$.

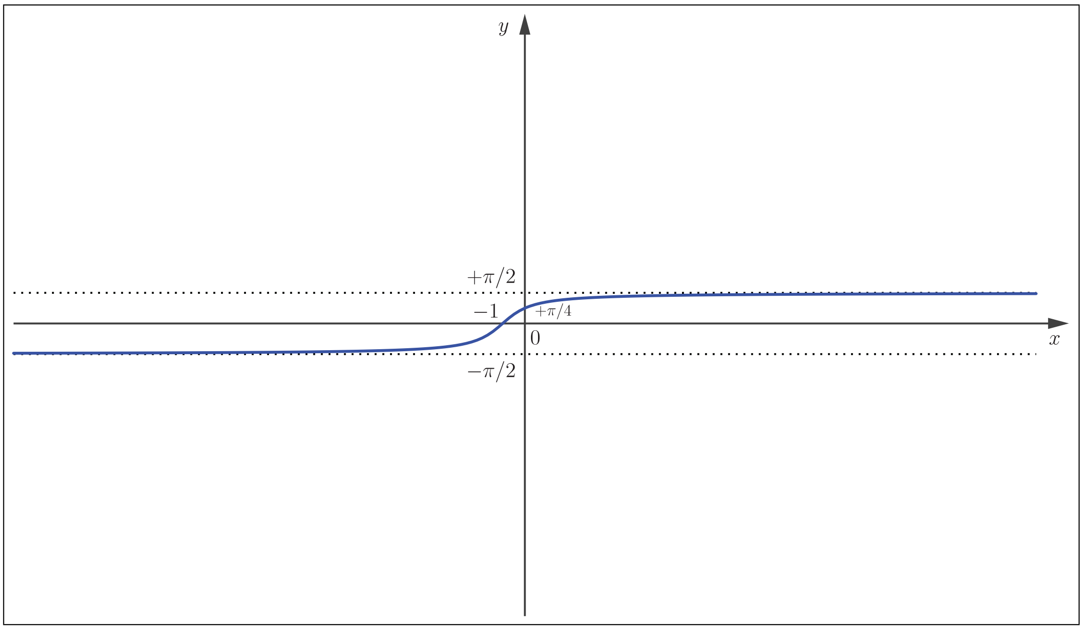


Figura 2: Gráfico de $y = g_1(x) = f(x+1) = \text{arctg}(x+1)$.

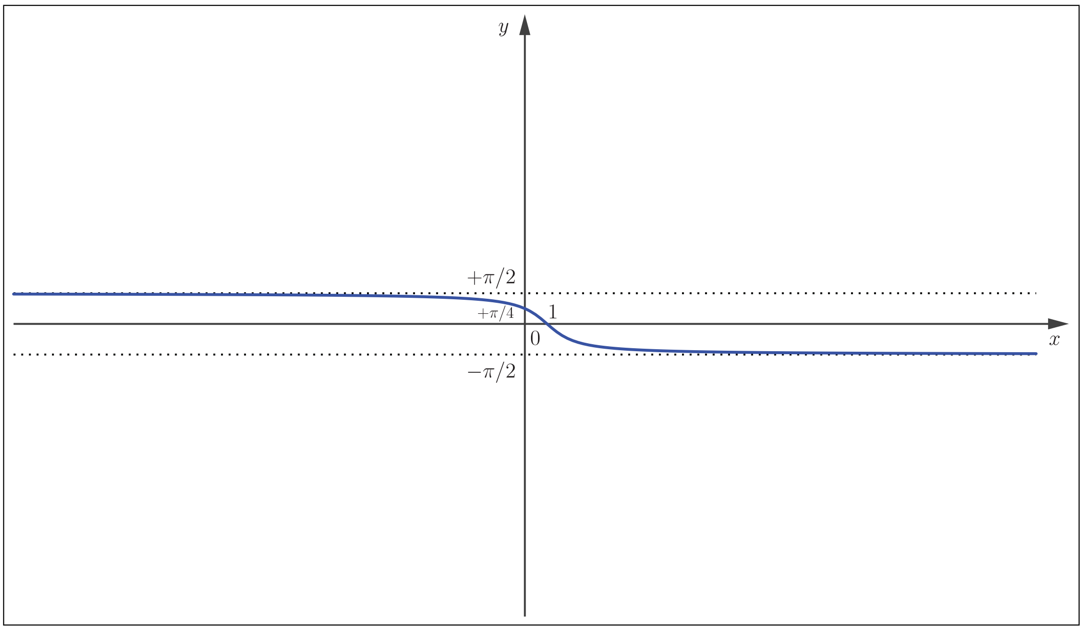


Figura 3: Gráfico de $y = g_2(x) = g_1(-x) = \operatorname{arctg}(-x+1)$.

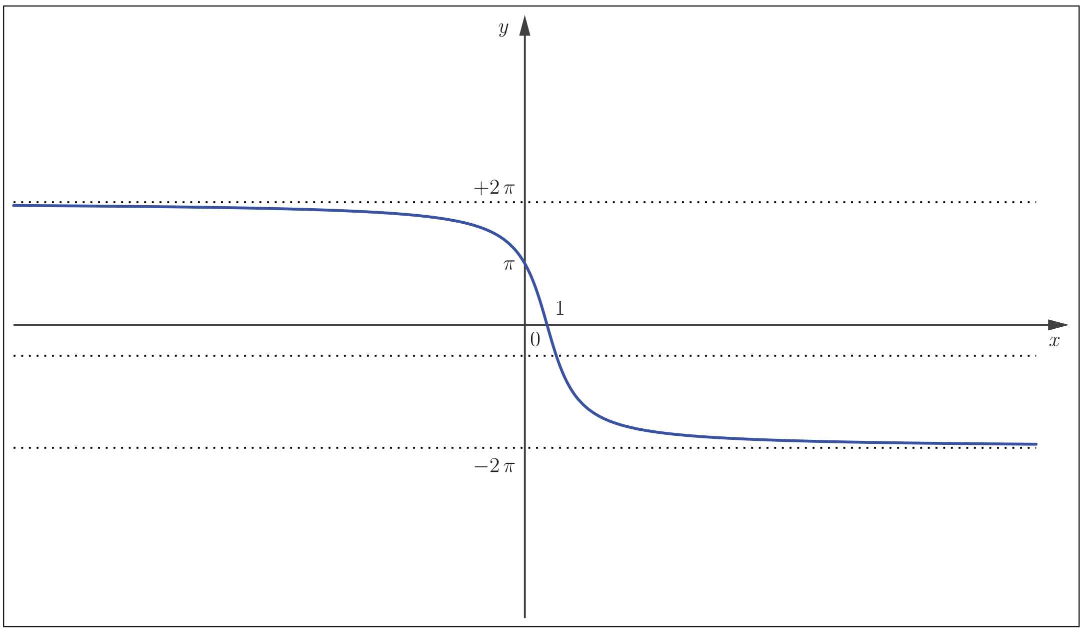


Figura 4: Gráfico de $y = g_3(x) = 4\,g_2(x) = 4\ \operatorname{arctg}(-x+1)$.

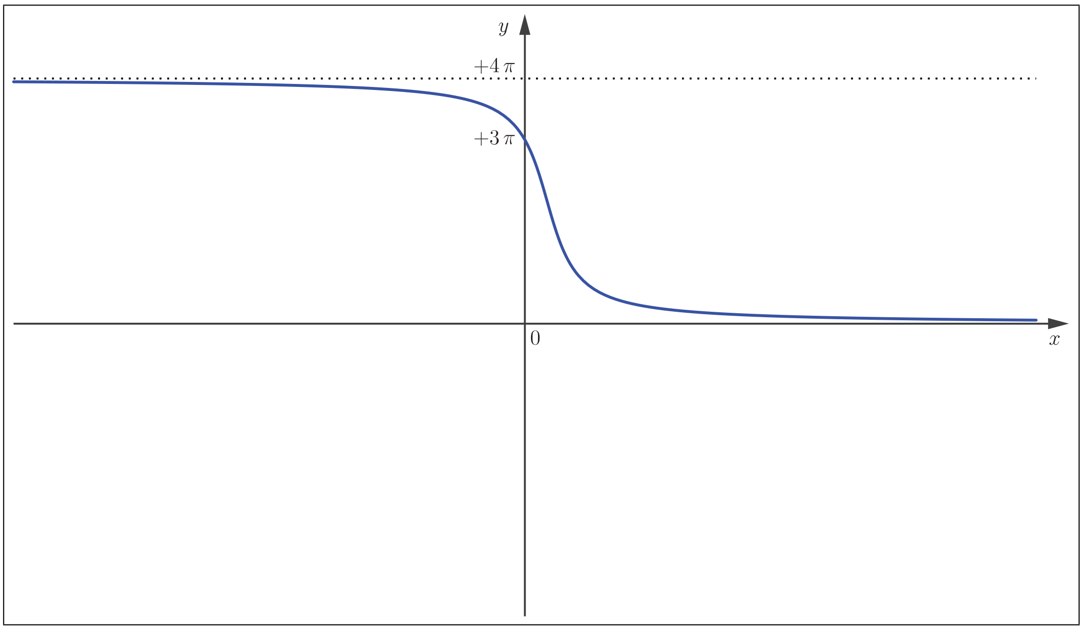


Figura 5: Gráfico de $y = h(x) = g_3(x) + 2\,\pi = 4\ \mathrm{arctg}(-x+1) + 2\,\pi)$.

[04] (2.0) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + x$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Justifique cuidadosamente a sua resposta!

Solução. Temos que $f(x) = 1/x^2 + x$ e $f(0) = 1 + 1$. Assim:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1/x^2 + x) - (1 + 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1/x^2 - 1}{x - 1} + \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{x^2\,(x - 1)} + \lim_{x\to 1} 1 \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x^2\,(x - 1)} + 1 \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-(1 + x)}{x^2} + 1 \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-2}{1} + 1 \;=\; -1.
\end{aligned}
$$

[05] (2.0) Determine as assíntotas horizontais e verticais (caso existam) do gráfico da função

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{2\,x^2 + 1}}{3\,x - 5}.$$

Justifique a sua resposta!

Solução. Vamos determinar primeiro as assíntotas verticais do gráfico de f. Se $p \neq 5/3$, então

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} \frac{\sqrt{2\,x^2 + 1}}{3\,x - 5} = \frac{\sqrt{2\,p^2 + 1}}{3\,p - 5},$$

que não é $-\infty$ e nem $+\infty$. Assim, a única candidata a assíntota vertical do gráfico de f é a reta $x = 5/3$. Como $\lim_{x \to (5/3)^+} \sqrt{2\,x^2+1} = \sqrt{531}/9 > 0$ e $\lim_{x \to (5/3)^+}(3\,x - 5) = 0^+$, concluímos que

$$\lim_{x \to (5/3)^+} f(x) = \lim_{x \to (5/3)^+} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = +\infty.$$

Segue-se então que a reta $x = 5/3$ é a única assíntota vertical do gráfico da função f. Vamos agora determinar as assíntotas horizontais do gráfico de f. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{x}}{\dfrac{3\,x-5}{x}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}^{+},
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que $|x| = +x$, pois $x > 0$. Também temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5} \\
&\overset{(**)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{-x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{x}}{\dfrac{3\,x-5}{x}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}^{+},
\end{aligned}$$

onde, em $(**)$, usamos que $|x| = -x$, pois $x < 0$. Sendo assim, as retas $x = -\sqrt{2}/3$ e $y = +\sqrt{2}/3$ são as únicas assíntotas horizontais do gráfico da função f.

[06] (2.0) Determine um valor para a constante c de modo que a função

$$y = f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\operatorname{sen}(x), & \text{se } x \neq 0, \\ c - 7, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

seja contínua em $p = 0$. Justifique a sua resposta!

Solução. Para que f seja contínua no ponto $p = 0$, deve existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$ deve ser igual a $f(0) = c - 7$. Agora,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{tg}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \operatorname{sen}(x) = 0,$$

pois

(a) $y = \operatorname{tg}(\cos(1/x))$ é uma função limitada ($\operatorname{tg}(-1) \leq \operatorname{tg}(\cos(1/x)) \leq \operatorname{tg}(+1)$, uma vez que $-1 \leq \cos(1/x) \leq +1$ para $x \neq 0$),

(b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

e, desta maneira, pelo teorema do anulamento, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Assim, $0 = c - 7$ e, portanto, $c = 7$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 03/05/2009.