DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

PRIMEIRA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi

http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Nome legível: ______________________________

Assinatura: ______________________________

[01] (1.0) Determine o domínio natural da função $y = f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Solução. Se x pertence ao domínio natural de f, então $1/x - 1/x^2 = (x-1)/x^2 > 0$ e $x \neq 0$. Como $x^2 \geq 0$, segue-se que $x - 1 > 0$, isto é, $x > 1$. Desta maneira, o domínio natural da função f é $D = (1, +\infty)$.

[02] (1.0) Considere uma função real f de domínio D e contradomínio C. O que é o gráfico de f? O que é a imagem de f? Defina estes conceitos!

Solução. Temos que:

$$\text{Gráfico de } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \text{ e } y = f(x)\}$$

e

$$\text{Imagem de } f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

[03] (2.0) Faça um esboço do gráfico de $y = h(x) = 3\left|\sqrt{-x} - 2\right|$ a partir do gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$ usando alongamentos, compressões, translações e reflexões. Em cada etapa, especifique qual transformação você empregou e faça um esboço do gráfico da função intermediária correspondente, indicando explicitamente as interseções com os eixos coordenados, caso existam.

Solução. Seja $y = f(x) = \sqrt{x}$), cujo gráfico é apresentado na Figura 1.

Etapa 1. $y = g_1(x) = f(-x) = \sqrt{-x}$: o gráfico de g_1 é obtido fazendo-se uma reflexão com relação ao eixo y do gráfico de f (Figura 2).

Etapa 2. $y = g_2(x) = g_1(x) - 2 = \sqrt{-x} - 2$: o gráfico de g_2 é obtido fazendo-se uma translação vertical 2 unidades para baixo do gráfico de g_1 (Figura 3).

Etapa 3. $y = g_3(x) = |g_2(x)| = |\sqrt{-x} - 2|$: o gráfico de g_3 é obtido fazendo-se um reflexão com relação ao eixo x dos pontos do gráfico de g_2 com ordenada negativa (Figura 4).

Etapa 4. $y = h(x) = 3\,g_3(x) = 3|\sqrt{-x} - 2|$: o gráfico de h é obtido fazendo-se um alongamento vertical de fator 2 do gráfico de g_3 (Figura 5).

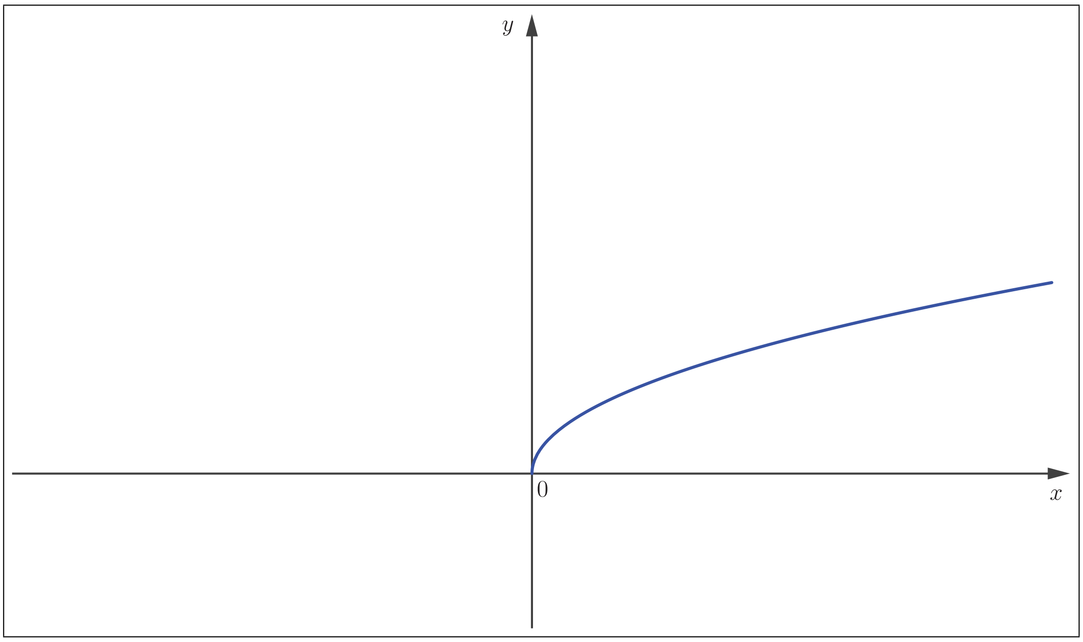

Figura 1: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

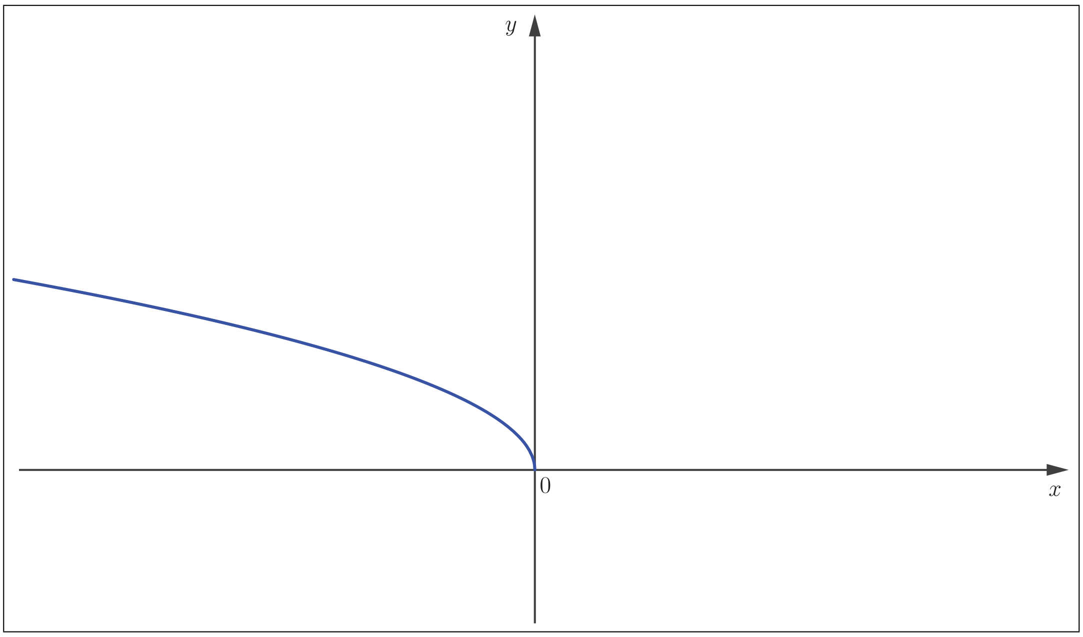

Figura 2: Gráfico de $y = g_1(x) = f(-x) = \sqrt{-x}$.

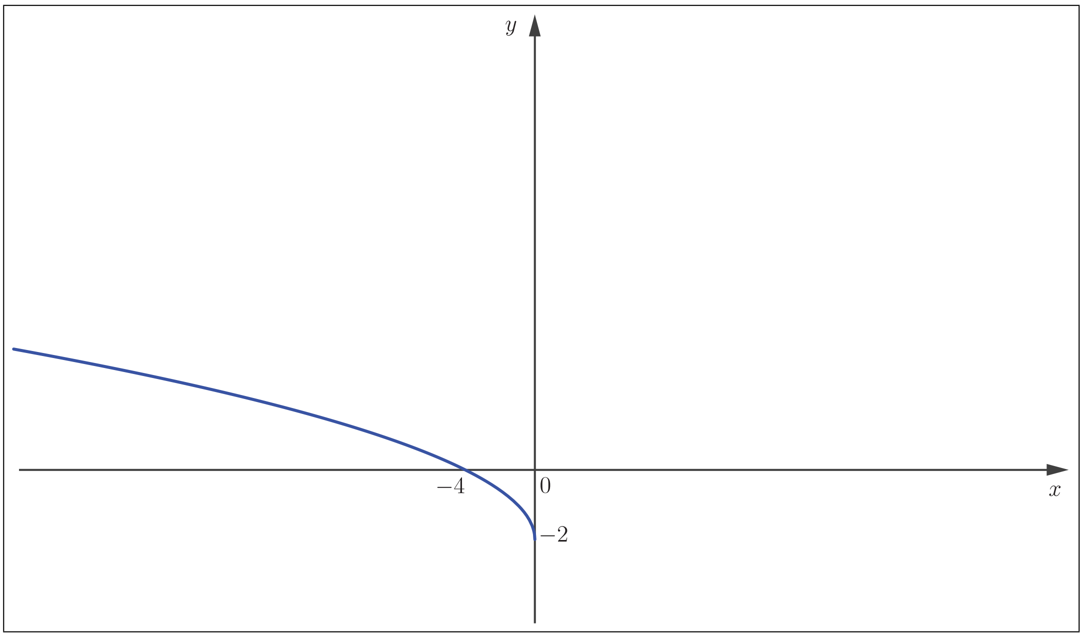

Figura 3: Gráfico de $y = g_2(x) = g_1(x) - 2 = \sqrt{-x} - 2$.

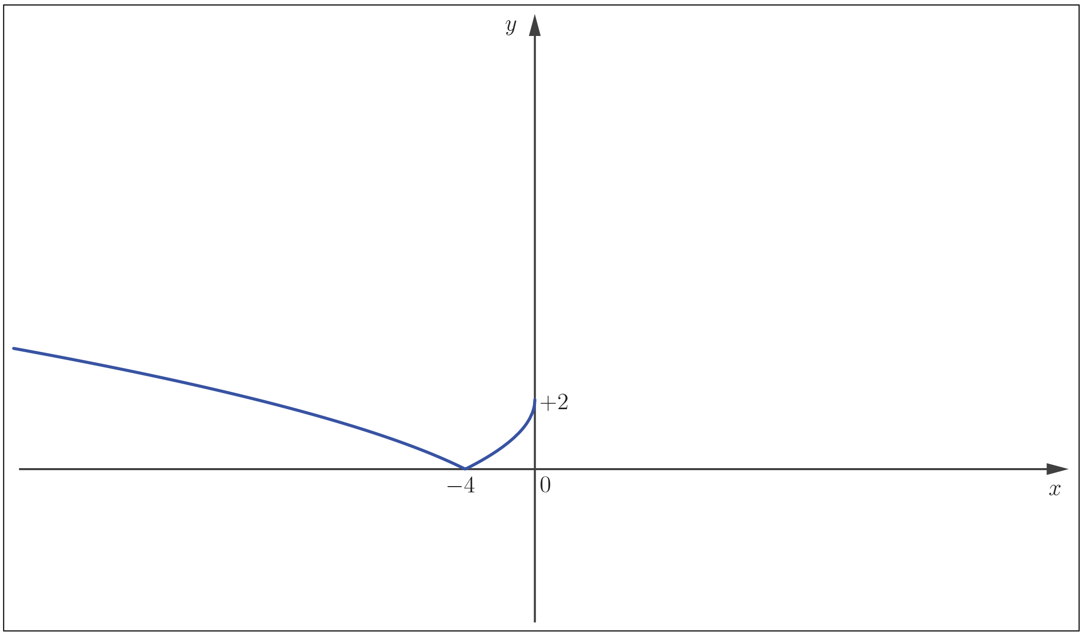

Figura 4: Gráfico de $y = g_3(x) = |g_2(x)| = |\sqrt{-x} - 2|$.

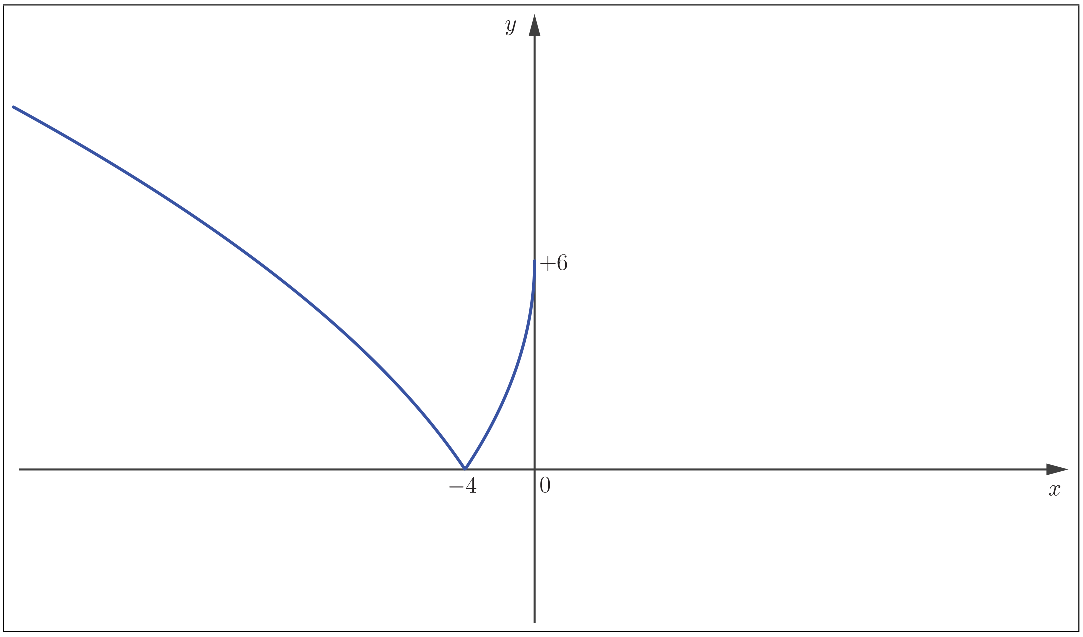

Figura 5: Gráfico de $y = h(x) = 3\, g_3(x) = 3\,|\sqrt{-x} - 2|$.

[04] (2.0) Seja $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{x+2}$. Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$. Justifique cuidadosamente a sua resposta!

Solução. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$\|$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+2} + \sqrt{h+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{h}$$
$$\|$$
$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} + \frac{\sqrt{h+6} - \sqrt{6}}{h} \right)$$
$$\|$$
$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{h+6} - \sqrt{6}}{h} \cdot \frac{\sqrt{h+6} + \sqrt{6}}{\sqrt{h+6} + \sqrt{6}} \right)$$
$$\|$$
$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{(\sqrt{h+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{h \cdot (\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{h+6})^2 - (\sqrt{6})^2}{h \cdot (\sqrt{h+6} + \sqrt{6})} \right)$$
$$\|$$
$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{h}{h \cdot (\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} + \frac{h}{h \cdot (\sqrt{h+6} + \sqrt{6})} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{h+6}+\sqrt{6}}\right)$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\|$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.$$

[05] (2.0) Determine as assíntotas horizontais e verticais (caso existam) do gráfico da função

$$y = f(x) = \frac{x^2-4\,x+4}{x^2-5\,x+6}.$$

Justifique a sua resposta!

Solução. Vamos determinar primeiro as assíntotas verticais do gráfico de f. Note que

$$y = f(x) = \frac{x^2-4\,x+4}{x^2-5\,x+6} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}.$$

Se $p \notin \{2,3\}$, então

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p}\frac{x^2-4\,x+4}{x^2-5\,x+6} = \frac{p-2}{p-3},$$

que não é $-\infty$ e nem $+\infty$. Assim, as únicas candidatas a assíntota vertical do gráfico de f são as retas $x=2$ e $x=3$. Agora

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4\,x+4}{x^2-5\,x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-3} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4\,x+4}{x^2-5\,x+6} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{x-3} = +\infty,$$

pois $\lim_{x\to 3^+}(x-2)=1$ e $\lim_{x\to 3^+}(x-3)=0^+$. Segue-se então que a reta $x=3$ é a única assíntota vertical do gráfico da função f. Vamos agora determinar as assíntotas horizontais do gráfico de f. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4\,x+4}{x^2-5\,x+6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-2/x}{1-3/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-2/x}{1-2/x-1/x} = 1^+$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4\,x+4}{x^2-5\,x+6} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-2/x}{1-3/x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-2/x}{1-2/x-1/x} = 1^-.$$

Sendo assim, a reta $x=1$ é a única assíntota horizontal do gráfico da função f.

[06] (2.0) Determine um valor para a constante c de modo que a função

$$y = f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{tg}(x), & \text{se } x \neq 0, \\ c, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

seja contínua em $p = 0$. Justifique a sua resposta!

Solução. Para que f seja contínua no ponto $p = 0$, deve existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$ deve ser igual a $f(0) = c$. Agora,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{tg}(x) = 0,$$

pois

(a) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$ é uma função limitada ($-\pi/2 \leq \operatorname{arctg}(1/x) \leq +\pi/2$ para $x \neq 0$),

(b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) = 0$

e, desta maneira, pelo teorema do anulamento, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Assim, $c = 0$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 03/05/2009.