# SEGUNDA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM


DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

**Cálculo I –A–**

**Humberto José Bortolossi**

**http://www.professores.uff.br/hjbortol/**


**Nome legível:** ____________________

**Assinatura:** ____________________

[01] (1.5) Usando a definição de derivada, mostre que $\dfrac{d}{dx}(\cos(x)) = -\operatorname{sen}(x)$. Justifique cuidadosamente a sua resposta!

**Solução.** Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\,\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\,\operatorname{sen}(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h} - \operatorname{sen}(x)\,\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \cos(x)\,\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} - \operatorname{sen}(x)\,\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \\
&\overset{(*)}{=} \cos(x)\,(0) - \operatorname{sen}(x)\,(1) \;=\; -\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos o limite fundamental

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$$

e o limite

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos(h)-1}{h}\cdot\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2(h)-1}{h\,(\cos(h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2(h)}{h\,(\cos(h)+1)} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\;\frac{-\operatorname{sen}(h)}{\cos(h)+1}\right] = (1)\,\frac{-(0)}{0+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[02] (2.0) Calcule a derivada da função $y = f(x) = \dfrac{\sec(2^{(x^2)}) + \log_{10}(\operatorname{tg}(x))}{\arccos(3\,x+1)+\ln(10)}$. Não é preciso simplificar a sua resposta!

**Solução.** Sejam $r(x) = \sec(2^{(x^2)})$, $s(x) = \log_{10}(\operatorname{tg}(x))$ e $t(x) = \arccos(3\,x+1)+\ln(10)$. Então $f(x) = (r(x)+s(x))/t(x)$ e, portanto,

$$f'(x) = \frac{(r'(x)+s'(x))\,t(x) - (r(x)+s(x))\,t'(x)}{(t(x))^2},$$

onde

$$\begin{aligned}
r'(x) &= \sec\left(2^{(x^2)}\right)\,\mathrm{tg}\left(2^{(x^2)}\right)\,\left(2^{(x^2)}\right)\,(\ln(2))\,(2\,x),\\
s'(x) &= \frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\,\frac{1}{\ln(10)}\,\sec^2(x),\\
t'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-(3\,x+1)^2}}\,(3).
\end{aligned}$$

[03] (2.5) Seja $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty$ tal que $g(2)=3$, $g'(2)=4$, $g''(2)=5$, $g(4)=1$, $g'(4)=2$ e $g''(4)=0$. Se $f(x)=g(x^2)+(g(x))^2$, calcule $f'(2)$ e $f''(2)$.

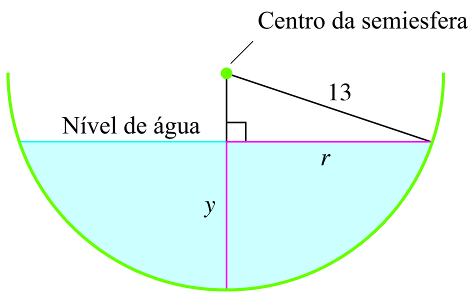
**Solução.** Temos que $f'(x)=2\,xg'(x^2)+2\,g(x)g'(x)$ e, consequentemente,

$$f''(x)=2\,g'(x^2)+4\,x^2g''(x^2)+2\,(g'(x))^2+2\,g(x)g''(x).$$

Sendo assim, $f'(2)=2\,(2)g'(4)+2\,g(2)g'(2)=2\,(2)(2)+2\,(3)(4)=32$ e

$$\begin{aligned}
f''(2) &= 2\,g'(4)+4\,(2)^2g''(4)+2\,(g'(2))^2+2\,g(2)g''(2)\\
&= 2\,(2)+4\,(2^2)(0)+2\,(4^2)+2\,(3)(5)=66.
\end{aligned}$$

[04] (2.5) Água está vazando de um reservatório semiesférico de raio $R=13$ m a uma taxa de 6 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. A figura abaixo apresenta uma esquema de perfil do reservatório.




Se $y$ representa o nível máximo de água no reservatório em metros (veja a figura), então o correspondente volume $V$ de água no reservatório é dado por $V=(\pi/3)y^2(3\,R-y)$.

(a) A que taxa o nível máximo de água $y$ está variando quando este nível máximo de água é igual a 8 m?

**Solução.** Temos que $V(t)=(\pi/3)(y(t))^2(39-y(t))$ Derivando dos dois lados, obtemos que

$$\frac{d}{dt}(V(t))=\frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{3}(y(t))^2(39-y(t))\right]=\frac{2\,\pi}{3}y(t)y'(t)(39-y(t))-\frac{\pi}{3}(y(t))^2y'(t).$$

Como $(dV/dt)(t)=\text{constante}=-6\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, no instante de tempo $t$ em que $y(t)=8$ m, vale que

$$-6=\frac{2\,\pi}{3}(8)y'(t)(39-8)-\frac{\pi}{3}(8)^2y'(t)=144\,\pi y'(t).$$

Sendo assim, neste instante de tempo, $y'(t)=-6/(144\,\pi)=-1/(24\,\pi)$ m/min.

(b) Encontre uma expressão para o raio $r$ da região circular que constitui a superfície de água do reservatório em função de $y$.

**Solução.** Pelo teorema de Pitágoras, $13^2 = (r(t))^2 + (13 - y(t))^2$. Logo,

$$r(t) = \sqrt{169 - (13 - y(t))^2}.$$

(c) A que taxa está variando $r$ quando o nível máxima de água $y$ é igual a 8 m?

**Solução.** Temos que

$$\frac{dr}{dt}(t) = \frac{(13 - y(t))}{\sqrt{169 - (13 - y(t))^2}} \frac{dy}{dt}(t).$$

No item (b), vimos que no instante de tempo $t$ em que $y(t) = 8$ m, vale que $(dy/dt)(t) = -1/(24\,\pi)$ m/min. Assim, neste instante de tempo,

$$\frac{dr}{dt}(t) = \frac{(13 - 8)}{\sqrt{169 - (13 - 8)^2}} \left(-\frac{1}{24\,\pi}\right) = -\frac{5}{288\,\pi}\text{m/min}.$$

[05] (1.5) Calcule o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $y = f(x) = \arctan(2\,x)$ no ponto $p = 1/2$.

**Solução.** O polinômio de Taylor de ordem 2 da função $y = f(x) = \arctan(2\,x)$ no ponto $p = 1/2$ é dado por

$$t_2(x) = f(1/2) + f'(1/2)\,(x - 1/2) + \frac{f''(1/2)}{2}\,(x - 1/2)^2.$$

Agora,

$$f'(x) = \frac{2}{1 + 4\,x^2} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = -\frac{16\,x}{(1 + 4\,x^2)^2}.$$

Portanto, $f'(1/2) = 1$ e $f''(1/2) = -2$. Como $f(1/2) = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4$, segue-se que

$$t_2(x) = \frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi - 3}{4} + 2\,x - x^2.$$

**Texto composto em LaTeX2e, HJB, 11/06/2009.**