SEGUNDA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Nome legível: ______________________________

Assinatura: ______________________________

[01] (2.0) Calcule a derivada da função

$$y = f(x) = \frac{\sec(x^3 + \arccos(0.3))}{2^x + \sqrt[3]{\operatorname{tg}(x^2)}} + \log_x(\operatorname{arctg}(x)).$$

Não é preciso simplificar a sua resposta! Atenção: a base do logaritmo que aparece na função f é x!

Solução. Podemos escrever $f(x) = r(x)/s(x) + t(x)$, onde $r(x) = \sec(x^3 + \arccos(0.3))$, $s(x) = 2^x + \sqrt[3]{\operatorname{tg} x^2}$ e $t(x) = \log_x(\operatorname{arctg}(x)) = \ln(\operatorname{arctg}(x))/\ln(x)$. Portanto,

$$f'(x) = \frac{r'(x)\, s(x) - r(x)\, s'(x)}{(s(x))^2} + t'(x),$$

onde

$$r'(x) = \sec\left(x^3 + \arccos(0.3)\right)\ \operatorname{tg}\left(x^3 + \arccos(0.3)\right)\ \left(3\,x^2\right),$$

$$s'(x) = 2^x \ln(2) + \frac{\sec^2(x^2)\,(2\,x)}{3\,\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2(x^2)}},$$

$$t'(x) = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(x)}\,\dfrac{1}{1+x^2}\,\ln(x) - \ln(\operatorname{arctg}(x))\,\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2}.$$

[02] (2.0) Calcule, caso existam, os valores das constantes a e b de tal forma que a função f definida abaixo seja diferenciável em $\mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x), & \text{se } x \leq 1, \\ a\,x + b, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Solução. Certamente f é diferenciável em $x < 1$, pois a função arco-tangente é diferenciável neste intervalo. A função f também é diferenciável em $x > 1$ pois, neste intervalo, f é uma função afim. Resta considerar a diferenciabilidade de f no ponto $x = 1$. Para que f seja diferenciável em $x = 1$, f deve ser contínua em $x = 1$. Deste modo, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, isto é, $\operatorname{arctg}(1) = a + b = \operatorname{arctg}(1)$. Logo, $a + b = \pi/4$. Se f é diferenciável em $x = 1$, então $f'_-(1) = f'_+(1)$. Sendo assim,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{arctg}(x) - \pi/4}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{a\,x + b - \pi/4}{x - 1}.$$

Mas

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{arctg}(x) - \pi/4}{x-1} = \frac{d}{dx}(\operatorname{arctg}(x))\bigg|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{a\,x + b - \pi/4}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{a\,x+b-(a+b)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{a\,(x-1)}{x-1} = a.$$

Assim, para que f seja diferenciável em $x = 1$, a deve ser igual a $1/2$ e b deve ser igual a $\pi/4 - a = \pi/4 - 1/2$.

[03] (2.5) Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que $g(0) = \pi/2$, $g'(0) = 4$, $g''(0) = 5$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ e $g''(1) = 0$. Se $f(x) = g(\cos(x)) + \cos(g(x))$, calcule o polinômio de Taylor de ordem 2 de f no ponto $p = 0$.

Solução. Temos que $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)\, g'(\cos(x)) - \operatorname{sen}(g(x))\, g'(x)$ e, consequentemente,

$$f''(x) = -\cos(x)\, g'(\cos(x)) + \operatorname{sen}^2(x) g''(\cos(x)) - \cos(g(x))\,(g'(x))^2 - \operatorname{sen}(g(x))\, g''(x).$$

Sendo assim, $f'(0) = -\operatorname{sen}(0)\, g'(\cos(0)) - \operatorname{sen}(g(0))\, g'(0) = -(0)\, g'(1) - \operatorname{sen}(\pi/2)\,(4) = -4$ e

$$\begin{aligned} f''(0) &= -\cos(0) g'(\cos(0)) + \operatorname{sen}^2(0) g''(\cos(0)) - \cos(g(0))(g'(0))^2 - \operatorname{sen}(g(0)) g''(0) \\ &= -(1)\, g'(1) + (0)^2 g''(1) - \cos(\pi/2)\,(4)^2 - \operatorname{sen}(\pi/2)\,(5) \\ &= -(1)\,(2) + (0)^2(0) - (0)\,(4)^2 - (1)\,(5) \quad = \quad -7. \end{aligned}$$

Dado que $f(0) = g(\cos(0)) + \cos(g(0)) = g(1) + \cos(\pi/2) = 1 + 0 = 1$, segue-se que o polinômio de Taylor de ordem 2 de f no ponto $p = 0$ é dado por:

$$t_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = 1 - 4\,x - \frac{7}{2}\,x^2.$$

[04] (2.0) Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação

$$y^y = \operatorname{arctg}(y) \cdot x - 2\,y.$$

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(12/\pi, 1)$.

Solução. Observando que $y^y = e^{y\,\ln(y)}$, temos que

$$e^{y\,\ln(y)} = \operatorname{arctg}(y) \cdot x - 2\,y.$$

Derivando dos dois lados, segue-se que

$$e^{y\,\ln(y)} \left(y'\,\ln(y) + y\,\frac{1}{y}\,y' \right) = \frac{1}{1+y^2}\,y'\,x + \operatorname{arctg}(y) - 2\,y'.$$

Quando $x = 12/\pi$, temos que $y = 1$. Assim,

$$e^{1\,\ln(1)} \left(y'\,\ln(1) + (1)\,\frac{1}{1}\,y' \right) = \frac{1}{1+(1)^2}\,y'\,\frac{12}{\pi} + \operatorname{arctg}(1) - 2\,y',$$

isto é,

$$y' = \frac{6}{\pi}\,y' + \frac{\pi}{4} - 2\,y',$$

de modo que, em $x = 12/\pi$, $y' = \pi^2/(12\,\pi - 24)$. Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(12/\pi, 1)$ é dada por

$$y = f\left(\frac{12}{\pi}\right) + f'\left(\frac{12}{\pi}\right)\left(x - \frac{12}{\pi}\right) = 1 + \frac{\pi^2}{12\,\pi - 24}\left(x - \frac{12}{\pi}\right).$$

[05] (1.5) Sejam f e g funções reais diferenciáveis. Usando a definição de derivadas, mostre que $h = f \cdot g$ também é diferenciável e que $h' = (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Solução. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&\qquad = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 12/06/2009.