TERCEIRA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi

http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Nome legível: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Se você estiver interessado em participar do concurso de monitoria de Cálculo I -A- no próximo ano, por favor, preencha os dados a seguir.

E-mail: ______________________________

Telefones fixo e celular: ______________________________

[01] Considere a função $y = f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$ definida em $\mathbb{R}$.

(a) (0.5) Determine, caso existam, as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

Solução. A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \operatorname{arctg}(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x apenas no ponto $(0, 0)$.

(b) (0.5) Determine se o gráfico de f possui alguma simetria: a função f é par, ímpar ou periódica?

Solução. A função f é par, pois $f(-x) = \operatorname{arctg}((-x)^2) = \operatorname{arctg}(x^2) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função não é ímpar, pois $f(-1) = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4 \neq -\pi/4 = -\operatorname{arctg}(1) = -f(1)$. A função f não é periódica.

(c) (1.0) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f.

Solução. Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x^2) = \frac{\pi}{2}^+ \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x^2) = \frac{\pi}{2}^+.$$

Concluímos assim que a reta $y = \pi/4$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f. Agora, como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, segue-se que o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

(d) (1.0) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que

$$f'(x) = \frac{2\,x}{1 + x^4}.$$

Como $1 + x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de f' é dado pelo sinal de x. Assim, a função f é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e ela é crescente no intervalo $(0, +\infty)$.

(e) (0.5) Determine os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo locais de f, caso existam.

Solução. No item anterior, vimos que o único ponto crítico da função f é $x = 0$. Como em $x = 0$ o sinal da derivada muda de $-$ para $+$, concluímos que $x = 0$ é ponto de mínimo local de f em D.

(f) (1.0) Determine os intervalos onde f é côncava para cima (convexa), os intervalos onde f é côncava para baixo e, caso existam, os pontos de inflexão do gráfico de f.

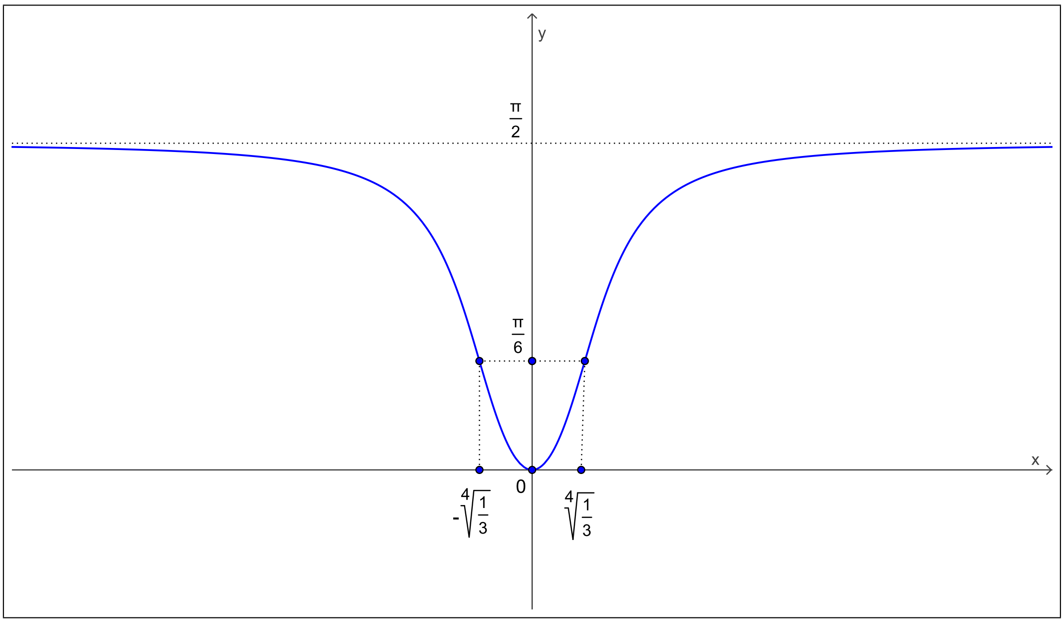
Solução. Temos que

$$f''(x) = \frac{2\,(1 + x^4) - 2\,x\,(4\,x^3)}{(1 + x^4)^2} = \frac{2\,(1 - 3\,x^4)}{(1 + x^4)^2}.$$

Como $(1 + x^4)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal de f'' é determinado pelo sinal da expressão $1 - 3\,x^4$. Desta maneira, f é côncava para cima no intervalo $(-\sqrt[4]{1/3}, +\sqrt[4]{1/3})$ e f é côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, -\sqrt[4]{1/3})$ e $(+\sqrt[4]{1/3}, +\infty)$. Como ocorreu mudança de concavidade em $-\sqrt[4]{1/3}$ e $+\sqrt[4]{1/3}$ (o sinal da derivada segunda mudou nestes pontos), vemos que $(-\sqrt[4]{1/3}, -\pi/6)$ $(+\sqrt[4]{1/3}, +\pi/6)$ são os únicos pontos de inflexão do gráfico de f.

(g) (1.0) Usando as informações dos itens anteriores, faça um esboço do gráfico de f. **No seu desenho você deve indicar explicitamente os pontos críticos e os pontos de inflexão, caso existam.**

Solução. Um esboço do gráfico de f é apresentado na figura abaixo.



[02] (1.5) Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \dfrac{1}{x}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &\Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{x^2+1-1-1}{x^2+1} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &\Rightarrow \quad y = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &\Rightarrow \quad y = \int 1\, dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx \\ &\Rightarrow \quad y = x - 2\operatorname{arctg}(x) + \ln(|x|) + C. \end{aligned}$$

Quando $x = 1$, $y = 2$. Logo

$$2 = 1 - 2\operatorname{arctg}(1) + \ln(|1|) + C = 1 - \frac{\pi}{4} + C.$$

Sendo assim, $C = 1 + \pi/2$. Consequentemente,

$$y = x - 2\operatorname{arctg}(x) + \ln(|x|) + 1 + \frac{\pi}{2}.$$

[03] (1.5) Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa, apresentando um contra-exemplo caso ela seja falsa e uma demonstração caso ela seja verdadeira.

(a) Se $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in D$, então f é uma função constante.

Solução. A sentença é falsa. Como contra-exemplo, considere o conjunto $D = (-2,-1) \cup (+1,+2)$ e $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in (-2,-1), \\ +1, & \text{se } x \in (+1,+2). \end{cases}$$

Note que f é de classe C^1, $f'(x) = 0$ para todo $x \in D$, mas f não é uma função constante.

(b) Se $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (0,1)$, então f é uma função constante.

Solução. A sentença é verdadeira. Seja $x \in D = (0,1)$. Pelo teorema do valor médio, existe c entre x e $1/2$ tal que

$$\frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = f'(c) = 0.$$

Assim, $f(x) - f(1/2) = 0$, isto é, $f(x) = f(1/2)$ para todo $x \in D = (0,1)$. Isto mostra que f é uma função constante.

(c) Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e $f''(p) = 0$, então p é um ponto de inflexão de f.

Solução. A sentença é falsa. Seja $y = f(x) = x^4$ definida em $\mathbb{R}$. Temos que $f''(0) = 0$, mas 0 não é ponto de inflexão de f.

[04] (1.5) Um arame de comprimento L é cortado em dois pedaços, sendo um dobrado em forma de quadrado e outro em forma de círculo. Como devemos cortar o arame para que a soma das áreas englobadas pelos dois pedaços seja mínima?

Solução. Seja x a medida do comprimento de um dos pedaços (de modo que o outro pedaço tem comprimento $L - x$). Se usarmos este pedaço para formar o quadrado, este terá área $(x/4)^2$. Usando o outro pedaço para formar o círculo, este terá raio igual a $(L-x)/(2\,\pi)$ e, portanto, área igual a $(L-x)^2/(4\,\pi)$. Assim, a área englobada pelos dois pedaços é

$$f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(L-x)^2}{4\,\pi},$$

com $0 < x < L$. Agora,

$$f'(x) = \frac{x}{8} - \frac{L-x}{2\,\pi} = \frac{(\pi+4)\,x - 4\,L}{8\,\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4\,L}{\pi+4}.$$

Note $p = 4\,L/(\pi+4)$ é tal que $0 < p < L$, pois $\pi + 4 > 4$. Assim p é o único ponto crítico de f no intervalo aberto $(0, L)$. Pelo teste da derivada primeira, p é ponto ponto de mínimo local. Pelo Exercício [05] da Lista 17, segue-se que p é ponto de mínimo global de f em $(0, L)$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 29/06/2009.