TERCEIRA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

GMA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi

http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Nome legível: ____________________

Assinatura: ____________________

Se você estiver interessado em participar do concurso de monitoria de Cálculo I -A- no próximo ano, por favor, preencha os dados a seguir.

E-mail: ____________________

Telefones fixo e celular: ____________________

[01] Considere a função

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$$

definida em $\mathbb{R}$.

(a) (0.5) Determine, caso existam, as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

Solução. A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = (0^2 - 1)/e^0 = -1$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, -1)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ ou } x = +1.$$

Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x nos pontos $(-1, 0)$ e $(+1, 0)$.

(b) (0.5) Determine se o gráfico de f possui alguma simetria: a função f é par, ímpar ou periódica?

Solução. A função f é não é par, pois $f(-2) = +3/e^{-2} \neq +3/e^{+2} = f(+2)$. A função f também não é ímpar, pois $f(-2) = +3/e^{-2} \neq -3/e^{+2} = -f(+2)$. A função f não é periódica.

(c) (1.0) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f.

Solução. Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x}{e^x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0^+,$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. O valor do limite é 0^+ porque $(x^2-1)/e^x > 0$ para x suficientemente grande. Agora,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} (x^2-1)\, e^{-x} = +\infty.$$

Concluímos assim que a reta $y=0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f. Agora, como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, segue-se que o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

(d) (1.0) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que

$$f'(x) = \frac{2\,xe^x - (x^2-1)\,e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+2\,x+1}{e^x}.$$

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de f' é dado pelo sinal de $-x^2+2\,x+1$. Assim, a função f é decrescente nos intervalos $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ e $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ e ela é crescente no intervalo $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

(e) (0.5) Determine os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo locais de f, caso existam.

Solução. No item anterior, vimos que os únicos pontos críticos da função f são $x = 1-\sqrt{2}$ e $x = 1+\sqrt{2}$. Como em $x = 1-\sqrt{2}$ o sinal da derivada muda de $-$ para $+$, concluímos que $x = 1-\sqrt{2}$ é ponto de mínimo local de f em D. Como em $x = 1+\sqrt{2}$ o sinal da derivada muda de $+$ para 1, concluímos que $x = 1+\sqrt{2}$ é ponto de máximo local de f em D.

(f) (1.0) Determine os intervalos onde f é côncava para cima (convexa), os intervalos onde f é côncava para baixo e, caso existam, os pontos de inflexão do gráfico de f.

Solução. Temos que

$$f''(x) = \frac{(-2\,x+2)e^x - (-x^2+2\,x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{x^2-4\,x+1}{e^x}.$$

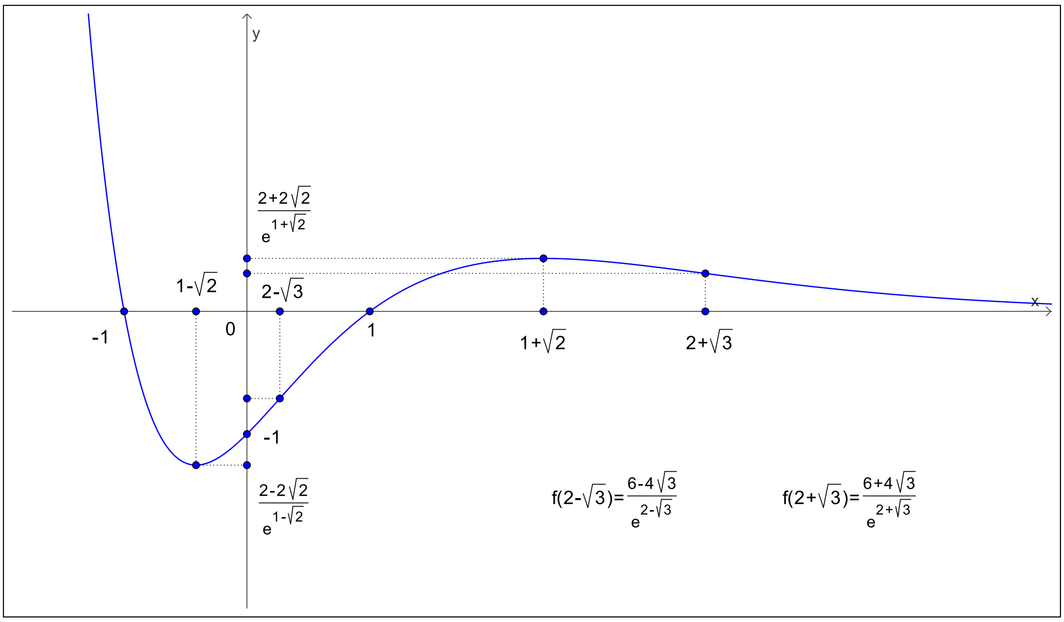
Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal de f'' é determinado pelo sinal da expressão $x^2-4\,x+1$. Desta maneira, f é côncava para cima no intervalo $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ e f é côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, 2-\sqrt{3})$ e $(2+\sqrt{3}, +\infty)$. Como ocorreu mudança de concavidade em $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$ (o sinal da derivada segunda mudou nestes pontos), vemos que

$$\left(2-\sqrt{3}, \frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(2+\sqrt{3}, \frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}\right)$$

são os únicos pontos de inflexão do gráfico de f.

(g) (1.0) Usando as informações dos itens anteriores, faça um esboço do gráfico de f. **No seu desenho você deve indicar explicitamente os pontos críticos e os pontos de inflexão, caso existam.**

Solução. Um esboço do gráfico de f é apresentado na figura abaixo.



[02] (1.0) A velocidade em função do tempo de um ponto material que se desloca sobre uma reta é dada por

$$v(t) = \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{1+t^2},$$

onde t é dado em segundos e $v(t)$ em metros por segundo. Sabendo que no tempo $t = 0$ a posição do ponto material é $s(0) = 1$ metro, determine sua posição no tempo $t = 1$.

Solução. A velocidade é a derivada da posição com relação ao tempo. Assim:

$$\frac{ds}{dt}(t) = v(t) = \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \int \left(\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$
$$\Rightarrow \quad s(t) = -\cos(t) + \operatorname{arctg}(t) + C.$$

Como $s(0) = 1$, segue-se que $1 = -\cos(0) + \operatorname{arctg}(0) + C = -1 + C$. Portanto, $C = 2$. Sendo assim, $s(t) = -\cos(t) + \operatorname{arctg}(t) + 2$. Quando $t = 1$, temos que

$$s(1) = -\cos(1) + \operatorname{arctg}(1) + 2 = -\cos(1) + \frac{\pi}{4} + 2 \text{ m}.$$

[03] Considere a função

$$f(x) = 2\,x - \ln(x^2 + 1).$$

(a) (1.0) Mostre que f é uma função crescente em $\mathbb{R}$.

Solução. Observe que

$$f'(x) = 2 - \frac{2\,x}{x^2+1} = \frac{2\,(x^2 - x + 1)}{x^2+1} > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

pois $x^2 + 1 > 0$ e $x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é crescente em $\mathbb{R}$.

(b) (1.0) Determine $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Justifique a sua resposta!

Solução. Para x suficientemente grande, $\ln(x^2+1) > 0$. Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \big(2\,x - \ln(x^2+1)\big) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) \left(\frac{2\,x}{\ln(x^2+1)} - 1 \right).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x}{\ln(x^2+1)} &\overset{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\dfrac{2\,x}{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2\,x}{\ln(x^2+1)} - 1 \right) = +\infty.$$

Uma vez que $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$, concluímos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2\,x - \ln(x^2+1)) = +\infty.$$

[04] (1.5) Determine, se é que existe, o ponto do gráfico da função

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

mais próximo do ponto $P = (3/2, 0)$. Justifique a sua resposta!

Solução. Queremos minimizar

$$g(x) = \sqrt{(x - 3/2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x - 3/2)^2 + x}.$$

sujeito a $x \in (0, +\infty)$. Pelo Exercício [11] da Lista 17, a solução ótima desde problema, caso exista, é a mesma solução ótima do problema de minimizar $h(x) = (x - 3/2)^2 + x$ sujeito a $x \in (0, +\infty)$. Agora,

$$h'(x) = 2\,(x - 3/2) + 1 = 2\,x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Assim, $x = 1$ é o único ponto crítico de h no intervalo $(0, +\infty)$. Pelo teste da derivada primeira, ponto de mínimo local. Pelo Exercício [05] da Lista 17, $x = 1$ é um ponto de mínimo global de h em $(0, +\infty)$. Assim, $(1, f(1)) = (1, 1)$ é o ponto do gráfico de $y = \sqrt{x}$ mais próximo do ponto $P = (3/2, 0)$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 29/06/2009.