Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 5

26 de março de 2009

Funções inversíveis

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é inversível se existe função $g\colon C \to D$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \in C$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \in D.$$

Neste caso, dizemos que g é a inversa de f e escreveremos:

$$g = f^{-1}.$$

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é inversível se existe função $g\colon C \to D$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in C$$

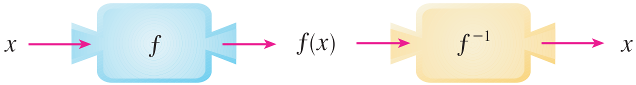
e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in D.$$

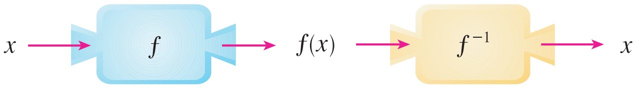
Neste caso, dizemos que g é a inversa de f e escreveremos:

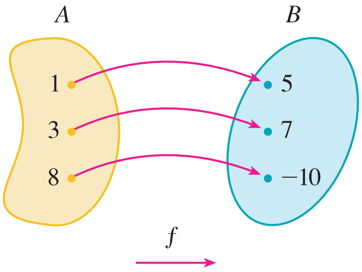
$$g = f^{-1}.$$

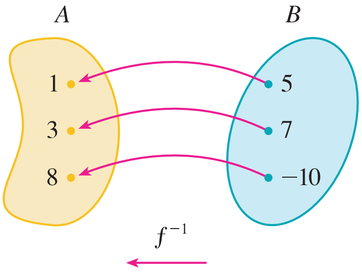
Exemplo



Exemplo







Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f: & D = [0, +\infty) & \rightarrow & C = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g: & C = [0, +\infty) & \rightarrow & D = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \qquad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \qquad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$f\colon \begin{array}{rcl} D=[0,+\infty) & \to & C=[0,+\infty) \\ x & \mapsto & y=f(x)=x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$g\colon \begin{array}{rcl} C=[0,+\infty) & \to & D=[0,+\infty) \\ x & \mapsto & y=g(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|=x,\qquad \text{para todo } x\in C=[0,+\infty)$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x,\qquad \text{para todo } x\in D=[0,+\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=[0,+\infty) & \to & C=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=f(x)=x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=[0,+\infty) & \to & D=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=g(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \qquad \text{para todo } x \in C = [0,+\infty)$$

e

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \qquad \text{para todo } x \in D = [0,+\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D = [0, +\infty) & \to & C = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C = [0, +\infty) & \to & D = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \qquad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \qquad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D = [0, +\infty) & \to & C = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rccl} g\colon & C = [0, +\infty) & \to & D = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \qquad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \qquad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$
\begin{array}{rccl}
f\colon & D=[0,+\infty) & \to & C=[0,+\infty) \\
 & x & \mapsto & y=f(x)=x^2
\end{array}
$$

é inversível, pois

$$
\begin{array}{rccl}
g\colon & C=[0,+\infty) & \to & D=[0,+\infty) \\
 & x & \mapsto & y=g(x)=\sqrt{x}
\end{array}
$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|=x, \qquad \text{para todo } x\in C=[0,+\infty)$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x, \qquad \text{para todo } x\in D=[0,+\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$
\begin{array}{rccl}
f\colon & D = [0, +\infty) & \to & C = [0, +\infty) \\
 & x & \mapsto & y = f(x) = x^2
\end{array}
$$

é inversível, pois

$$
\begin{array}{rccl}
g\colon & C = [0, +\infty) & \to & D = [0, +\infty) \\
 & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x}
\end{array}
$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \qquad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \qquad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D = [0, +\infty) & \to & C = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C = [0, +\infty) & \to & D = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=[0,+\infty) & \to & C=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=f(x)=x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=[0,+\infty) & \to & D=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=g(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|=x, \qquad \text{para todo } x\in C=[0,+\infty)$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x, \qquad \text{para todo } x\in D=[0,+\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D = [0, +\infty) & \to & C = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C = [0, +\infty) & \to & D = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D = [0, +\infty) & \to & C = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C = [0, +\infty) & \to & D = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=[0,+\infty) & \to & C=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=f(x)=x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=[0,+\infty) & \to & D=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=g(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad \text{para todo } x \in C = [0,+\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \text{para todo } x \in D = [0,+\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D = [0, +\infty) & \rightarrow & C = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C = [0, +\infty) & \rightarrow & D = [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & y = g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad \text{para todo } x \in C = [0, +\infty)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \text{para todo } x \in D = [0, +\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=[0,+\infty) & \rightarrow & C=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=f(x)=x^2 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=[0,+\infty) & \rightarrow & D=[0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y=g(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

é tal que

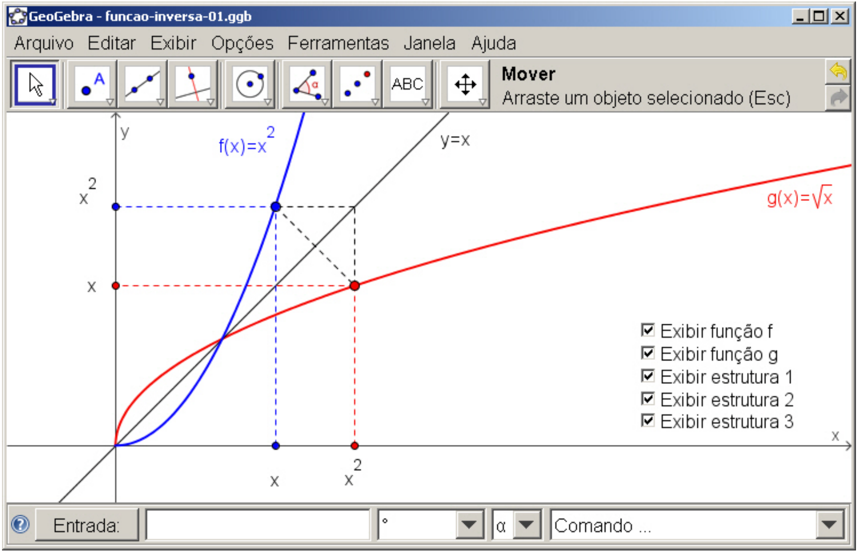
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|=x, \quad \text{para todo } x\in C=[0,+\infty)$$

e

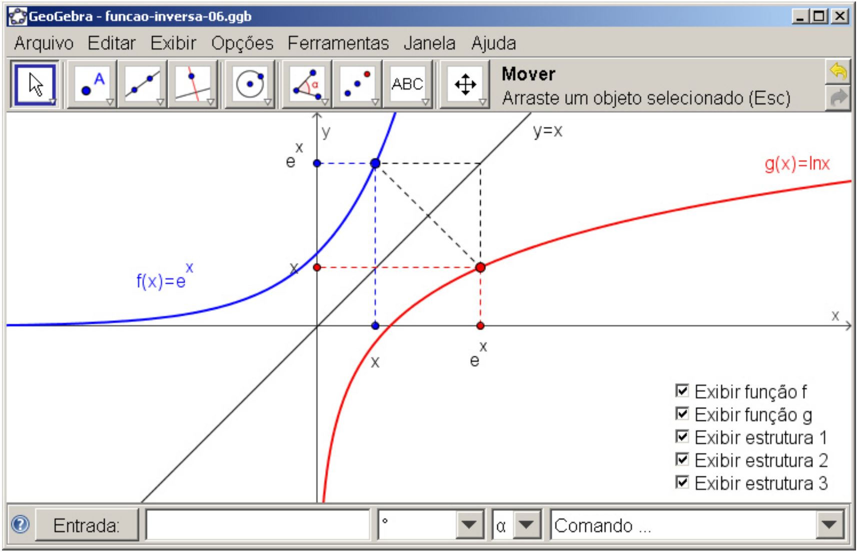
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x, \quad \text{para todo } x\in D=[0,+\infty).$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}$.

Exemplo


GeoGebra - funcao-inversa-01.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover
Arraste um objeto selecionado (Esc)
ABC
y
$f(x)=x^2$
y=x
x^2
x
$g(x)=\sqrt{x}$
Exibir função f
Exibir função g
Exibir estrutura 1
Exibir estrutura 2
Exibir estrutura 3
x
x
x^2
Entrada:
Comando ...

Exemplo


GeoGebra - funcao-inversa-06.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover
Arraste um objeto selecionado (Esc)
y
y=x
g(x)=lnx
f(x)=e^x
e^x
x
Exibir função f
Exibir função g
Exibir estrutura 1
Exibir estrutura 2
Exibir estrutura 3
Entrada:
Comando ...

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, enquanto que $(f(x))^{-1} = (x^2)^{-1} = 1/x^2$.

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, enquanto que $(f(x))^{-1} =$ [illegible].

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, enquanto que $(f(x))^{-1} = (x^2)^{-1} = 1/x^2$.

Cuidado

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, enquanto que $(f(x))^{-1} = (x^2)^{-1} = 1/x^2$.

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, enquanto que $(f(x))^{-1} = (x^2)^{-1} = 1/x^2$.

Proposição

Proposição

$f : D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Proposição

$f\colon D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$
   e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Proposição

Proposição

$f: D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

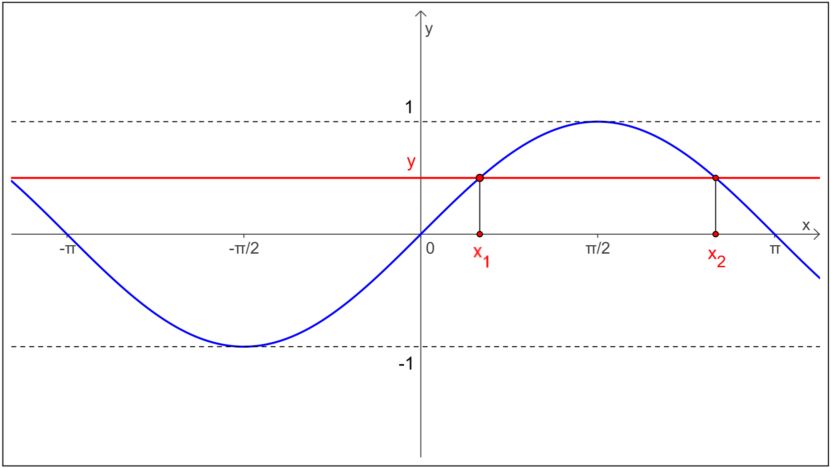
Proposição

$f: D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

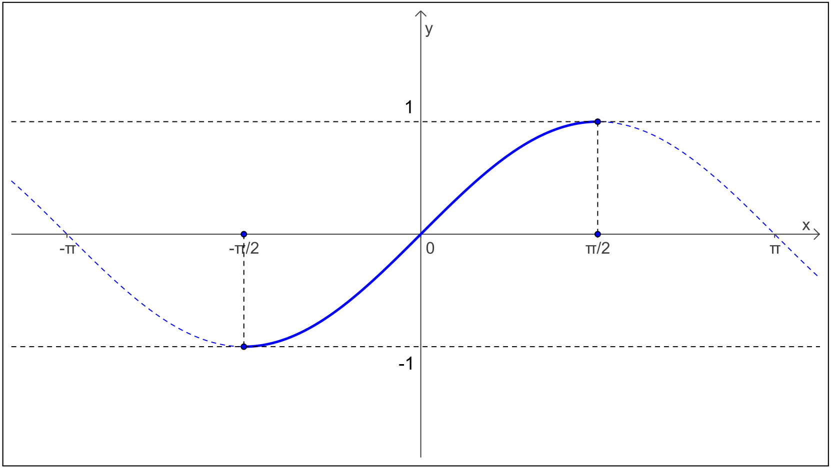
1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \mathrm{sen}(x) \end{array}$$ não é inversível, pois não é injetiva.

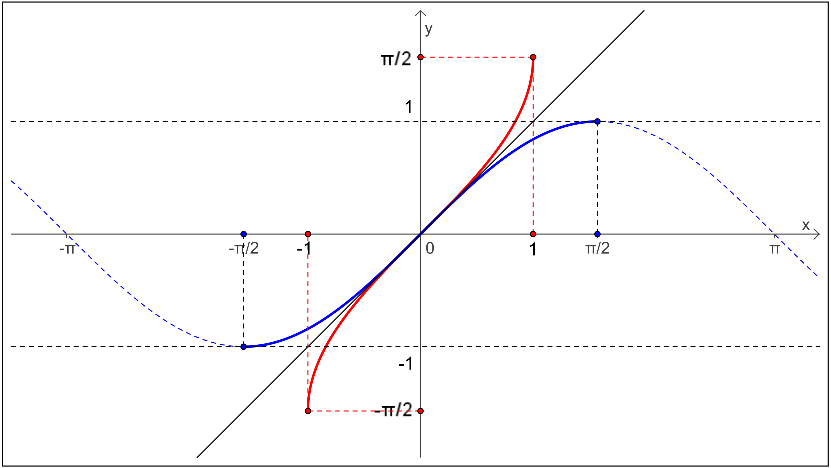


$$\begin{array}{rccc} f: & [-\pi/2, +\pi/2] & \to & [-1, +1] \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



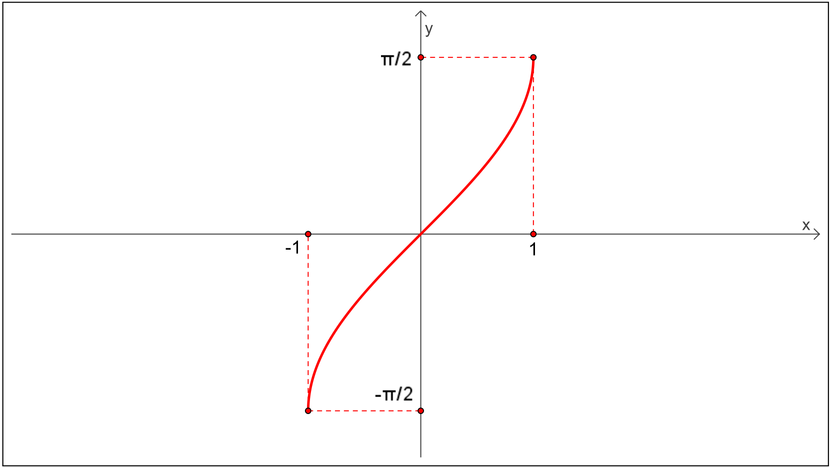
Exemplo

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \; [-1,+1] & \to & [-\pi/2,+\pi/2] \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [-\pi/2,+\pi/2] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

$$\text{Se } x = \operatorname{sen}(t) \text{ para } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \text{ então } t = \operatorname{arcsen}(x).$$

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

$$\text{arcsen}(0) = 0, \qquad \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^{\circ}.$$

$$\text{Se } x = \text{sen}(t) \text{ para } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \text{ então } t = \text{arcsen}(x).$$

De fato:

$$x = \text{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \text{arcsen}(x) = \text{arcsen}(\text{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \text{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

$$\text{Se } x = \operatorname{sen}(t) \text{ para } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \text{ então } t = \operatorname{arcsen}(x).$$

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\text{arcsen}(0) = 0, \qquad \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^{\circ}.$$

$$\text{Se } x = \text{sen}(t) \text{ para } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \text{ então } t = \text{arcsen}(x).$$

De fato:

$$x = \text{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \text{arcsen}(x) = \text{arcsen}(\text{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \text{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^{\circ}.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^{\circ}.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

$$\text{Se } x = \operatorname{sen}(t) \text{ para } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \text{ então } t = \operatorname{arcsen}(x).$$

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{sen}(t) \Rightarrow \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arcsen}(0) = 0, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

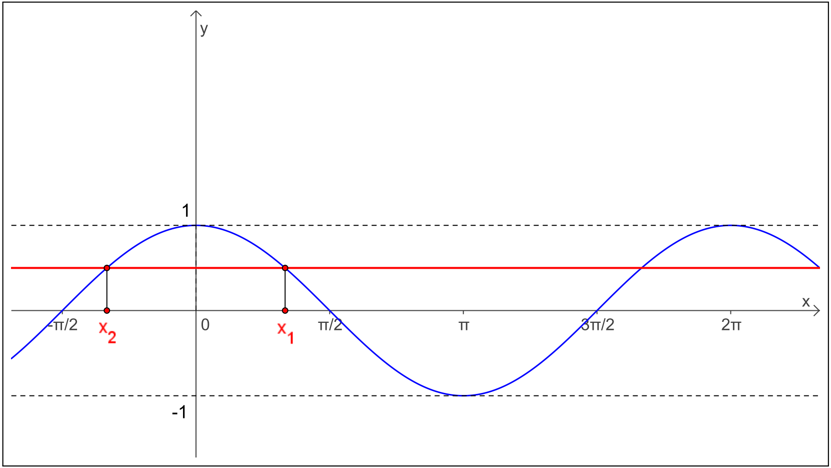
$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.339836909\ldots = 19.471220634\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{sen}(t)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, então $t = \operatorname{arcsen}(x)$.

De fato:

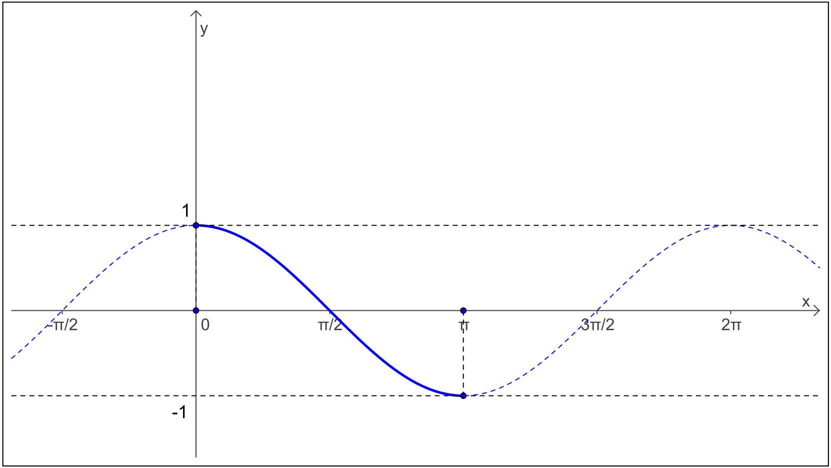
$$x = \operatorname{sen}(t) \;\Rightarrow\; \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \operatorname{arcsen}(x).$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$ não é inversível, pois não é injetiva.



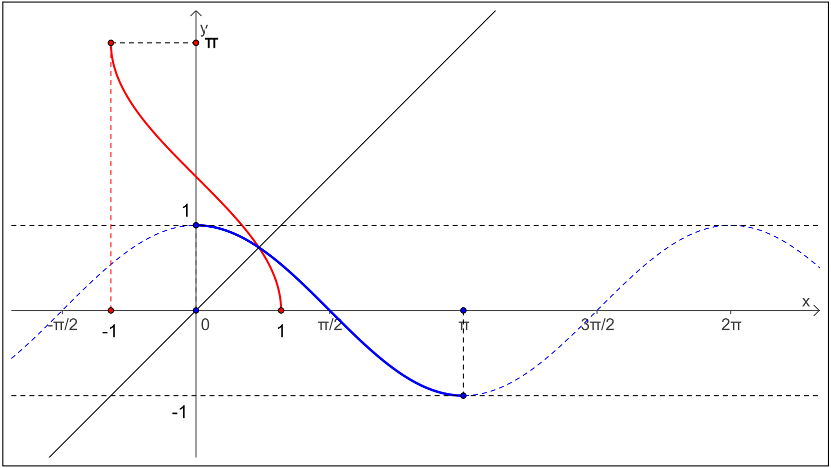
A função arco cosseno

$$f: \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,+1] \\ x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



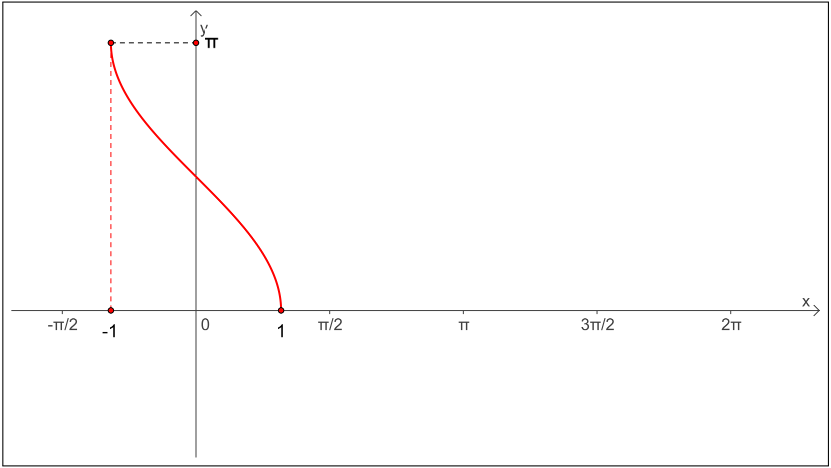
A função arco cosseno

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \quad [-1,+1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arccos}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arccos}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



Exemplo

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \arccos(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \arccos(x) = \arccos(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \arccos(x).$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \arccos(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \arccos(x) = \arccos(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \arccos(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^{\circ}.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\text{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \text{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \text{arccos}(x) = \text{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \text{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\text{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \text{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \text{arccos}(x) = \text{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \text{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t =$ $\arccos(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \Rightarrow \arccos(x) = \arccos(\cos(t)) = t \Rightarrow t = \arccos(x).$$

Exemplo

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^{\circ}.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \arccos(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \arccos(x) = \arccos(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \arccos(x).$$

Exemplo

$$\text{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \text{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \text{arccos}(x) = \text{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \text{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \;\Rightarrow\; \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \operatorname{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^\circ.$$

Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arccos}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.230959417\ldots = 70.528779365\ldots^{\circ}.$$

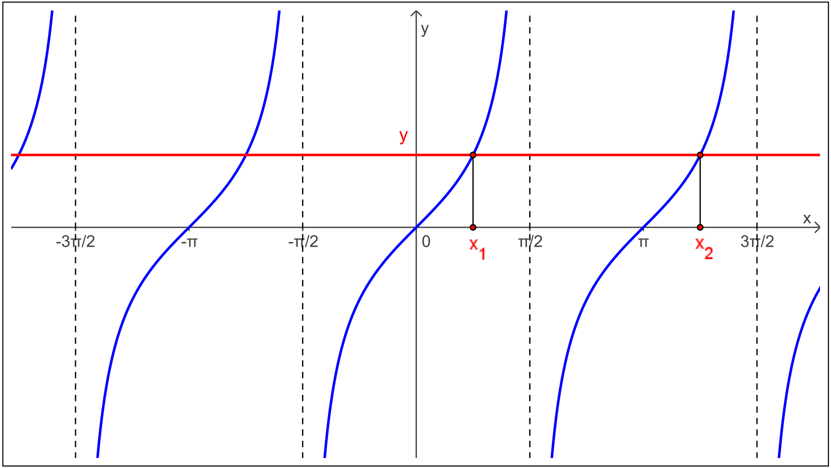
Se $x = \cos(t)$ para $t \in [0, \pi]$, então $t = \operatorname{arccos}(x)$.

De fato:

$$x = \cos(t) \;\Rightarrow\; \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arccos}(\cos(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \operatorname{arccos}(x).$$

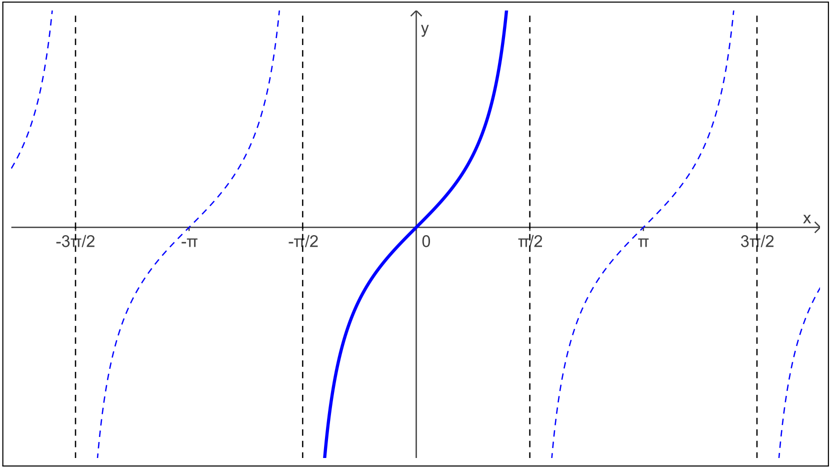
A função arco tangente

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{tg}(x) \end{array}$$ não é inversível.



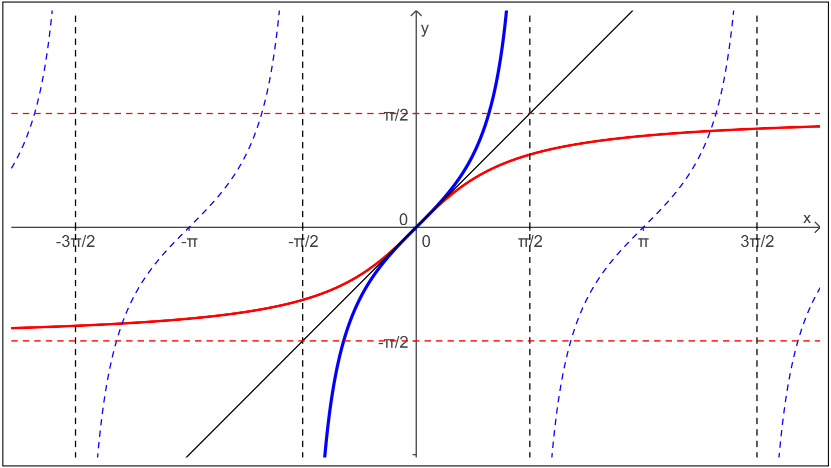
A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f: & (-\pi/2, +\pi/2) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{tg}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



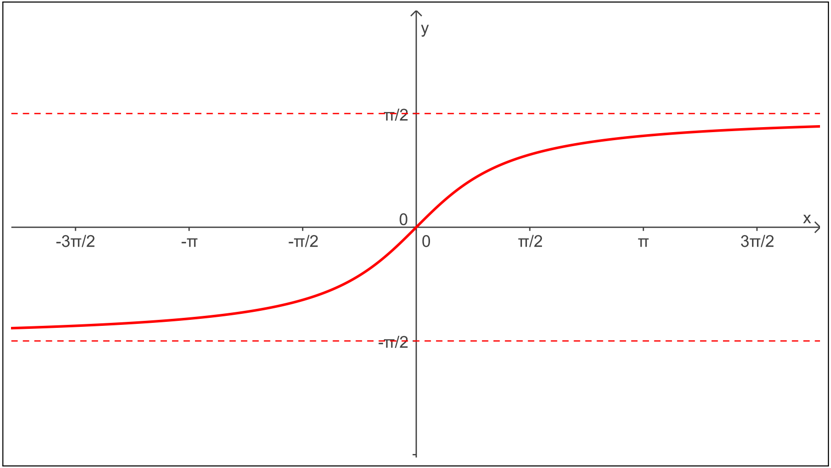
A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & (-\pi/2, +\pi/2) \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco tangente

$$f^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & (-\pi/2, +\pi/2) \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\text{arctg}(0) = 0, \qquad \text{arctg}\,(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^{\circ}.$$

Se $x = \text{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \text{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \text{tg}(t) \;\Rightarrow\; \text{arctg}(x) = \text{arctg}(\text{tg}(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \text{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ\,.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ .$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t =$ $\operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\text{arctg}(0) = 0, \qquad \text{arctg}\,(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ\,.$$

Se $x = \text{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \text{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \text{tg}(t) \;\Rightarrow\; \text{arctg}(x) = \text{arctg}(\text{tg}(t)) = t \;\Rightarrow\; t = \text{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Exemplo

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321750554\ldots = 18.434948822\ldots^\circ.$$

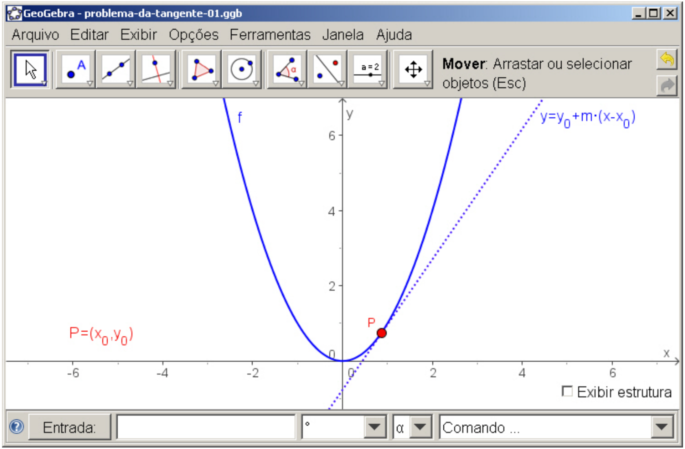
Se $x = \operatorname{tg}(t)$ para $t \in (-\pi/2, +\pi/2)$, então $t = \operatorname{arctg}(x)$.

De fato:

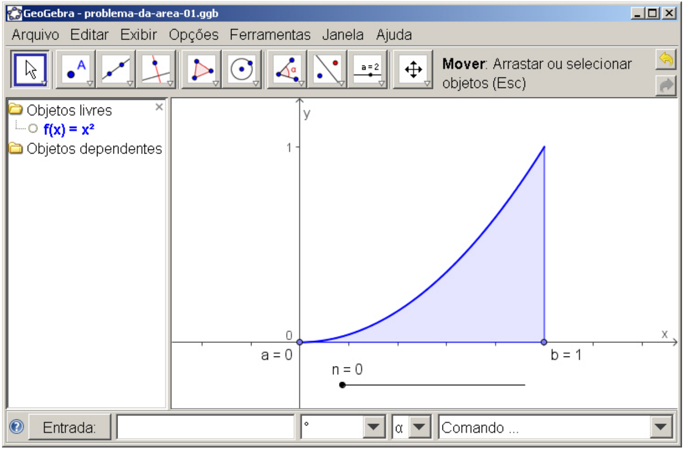
$$x = \operatorname{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(x).$$

Limites

Dada uma função f e um ponto P no seu gráfico, ache uma equação da reta que é tangente ao gráfico de f em P.



Dada uma função f, ache a área entre o gráfico de f e um intervalo $[a, b]$ no eixo x.



Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

não está definida em $p = 1$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 1$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

não está definida em $p = 1$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 1$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

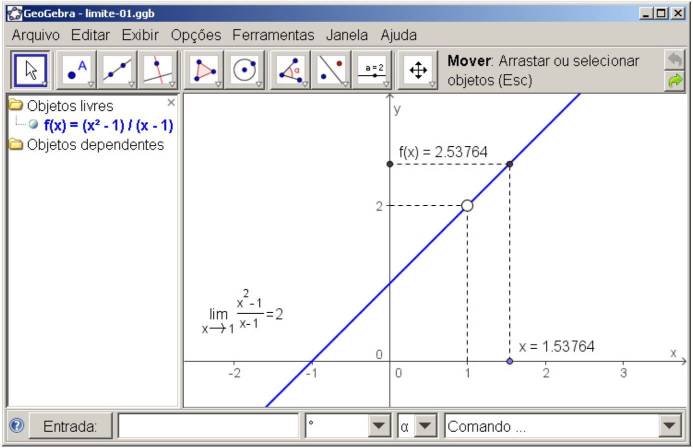
Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

O que está acontecendo geometricamente?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$



Definição

Se os valores de $q(x)$ poderem ser tomados tão próximos quanto quisermos do número L, fazendo x suficientemente próximo de p (mas não igual a p), então escrevemos

$$\lim_{x \to p} q(x) = L,$$

o qual deve ser lido como

"o limite de $q(x)$ quando x tende a p é igual a L".

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

não está definida em $p = 0$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 0$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

não está definida em $p = 0$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 0$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
$-\,0.1000$	$1.9486832\ldots$
$-\,0.0100$	$1.9949874\ldots$
$-\,0.0010$	$1.9994998\ldots$
$-\,0.0001$	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\text{Logo,} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

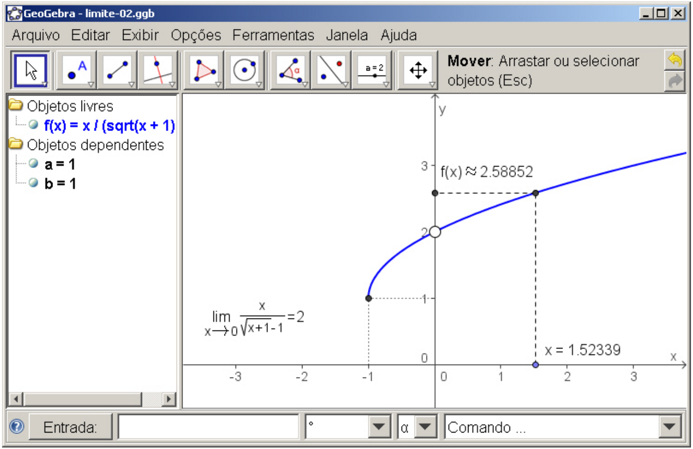
Logo, $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2.$$



$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10\cdot\pi$	0
-0.0100	$-100\cdot\pi$	0
-0.0010	$-1000\cdot\pi$	0
-0.0001	$-10000\cdot\pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000\cdot\pi$	0
0.0010	$1000\cdot\pi$	0
0.0100	$100\cdot\pi$	0
0.1000	$10\cdot\pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10\cdot\pi$	0
-0.0100	$-100\cdot\pi$	0
-0.0010	$-1000\cdot\pi$	0
-0.0001	$-10000\cdot\pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000\cdot\pi$	0
0.0010	$1000\cdot\pi$	0
0.0100	$100\cdot\pi$	0
0.1000	$10\cdot\pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10\cdot\pi$	0
-0.0100	$-100\cdot\pi$	0
-0.0010	$-1000\cdot\pi$	0
-0.0001	$-10000\cdot\pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000\cdot\pi$	0
0.0010	$1000\cdot\pi$	0
0.0100	$100\cdot\pi$	0
0.1000	$10\cdot\pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10\cdot\pi$	0
-0.0100	$-100\cdot\pi$	0
-0.0010	$-1000\cdot\pi$	0
-0.0001	$-10000\cdot\pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000\cdot\pi$	0
0.0010	$1000\cdot\pi$	0
0.0100	$100\cdot\pi$	0
0.1000	$10\cdot\pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10\cdot\pi$	0
-0.0100	$-100\cdot\pi$	0
-0.0010	$-1000\cdot\pi$	0
-0.0001	$-10000\cdot\pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000\cdot\pi$	0
0.0010	$1000\cdot\pi$	0
0.0100	$100\cdot\pi$	0
0.1000	$10\cdot\pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

Não existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$!