Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 6

31 de março de 2009

Exercícios

Exercício 1

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{2\,x^2 + 5\,x - 3}{2\,x^2 - 5\,x + 2} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 1/2} \frac{2\,(x - 1/2)(x + 3)}{2\,(x - 1/2)(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1/2} \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$= \frac{1/2 + 3}{1/2 - 2} = -\frac{7}{3}.$$

$(*)$ pois $2\,x^2 + 5\,x - 3 = 2\,(x - 1/2)(x + 3)$ e
$2\,x^2 - 5\,x + 2 = 2\,(x - 1/2)(x - 2)$.

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2 + 5\,x - 3}{2\,x^2 - 5\,x + 2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{1/2+3}{1/2-2} = -\frac{7}{3}.$$

$(*)$ pois $2\,x^2 + 5\,x - 3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2 - 5\,x + 2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2+5\,x-3}{2\,x^2-5\,x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{1/2+3}{1/2-2} = -\frac{7}{3}.$$

$(*)$ pois $2\,x^2+5\,x-3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2-5\,x+2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2+5\,x-3}{2\,x^2-5\,x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{1/2+3}{1/2-2} = -\frac{7}{3}.$$

$(*)$ pois $2\,x^2+5\,x-3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2-5\,x+2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2+5\,x-3}{2\,x^2-5\,x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{1/2+3}{1/2-2} = -\frac{7}{3}.$$

$(*)$ pois $2\,x^2+5\,x-3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2-5\,x+2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)$$

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)$$

Exercício 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{6}} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{6})^2}{x \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{6})} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{x \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} + \frac{x}{x \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{6})} \right)$$

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

Exercício 2

Desta maneira,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Desta maneira,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Desta maneira,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Limites laterais

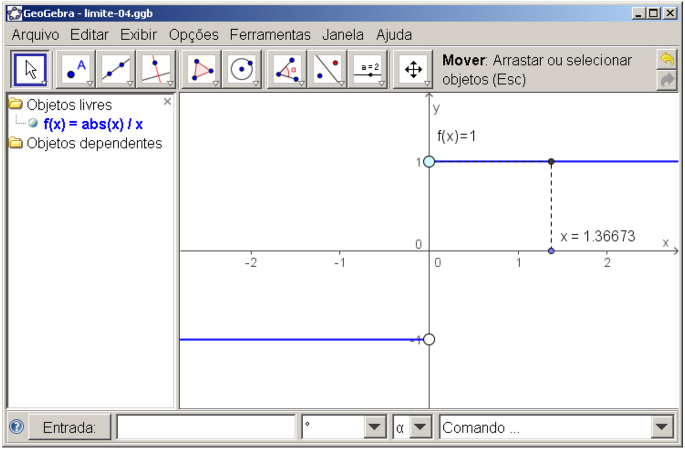
Limites laterais

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

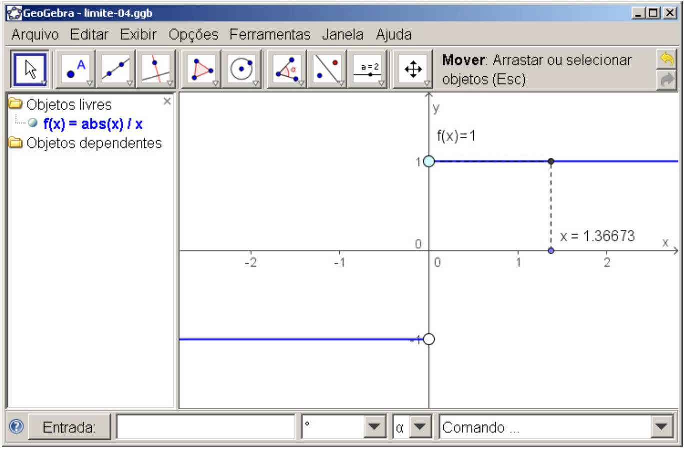
Limites laterais

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

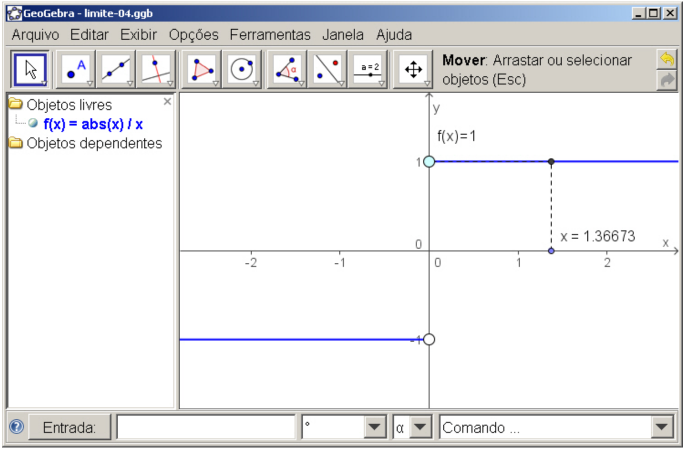
$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Não existe $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \ldots$



mas existem os limites laterais $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = +1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$.



Limite lateral à direita (de um ponto de vista informal)

Definição

Se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos quanto quisermos de um número L, fazendo x suficientemente próximo de p (porém maior do que p), então escreveremos

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L,$$

o qual deve ser lido

"o limite de $f(x)$ quando x tente a p pela direita é igual a L".

Limite lateral à esquerda (de um ponto de vista informal)

Definição

Se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos quanto quisermos de um número L, fazendo x suficientemente próximo de p (porém menor do que p), então escreveremos

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L,$$

o qual deve ser lido

"o limite de $f(x)$ quando x tente a p pela esquerda é igual a L".

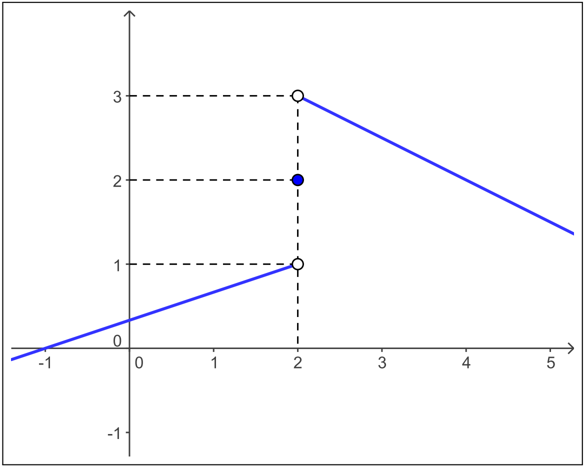
Proposição

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

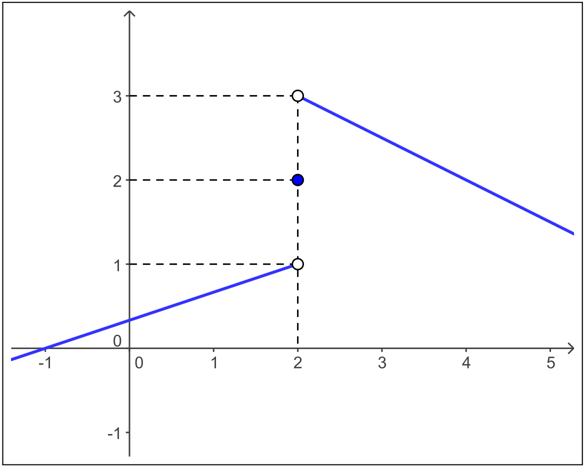
$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = L.$$

Exemplo



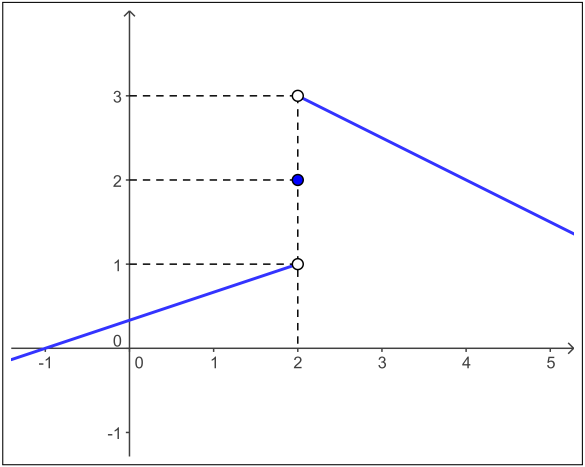
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



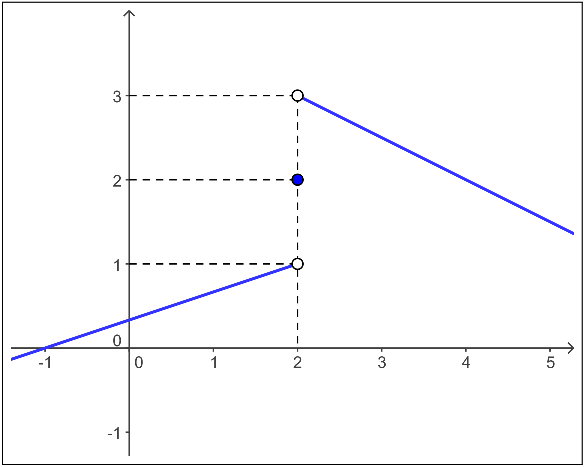
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



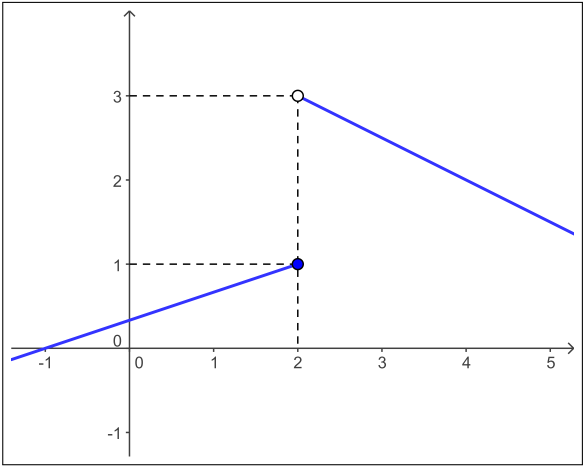
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



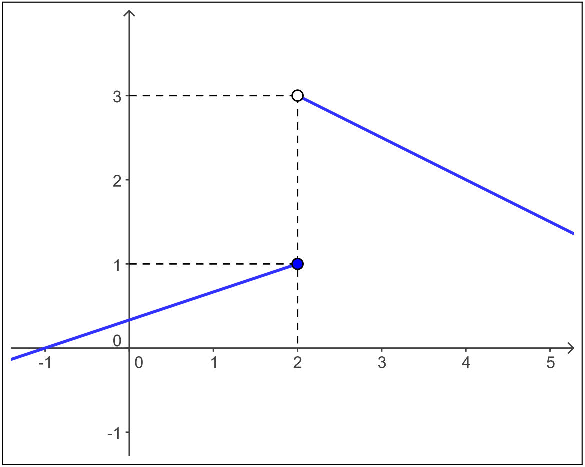
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



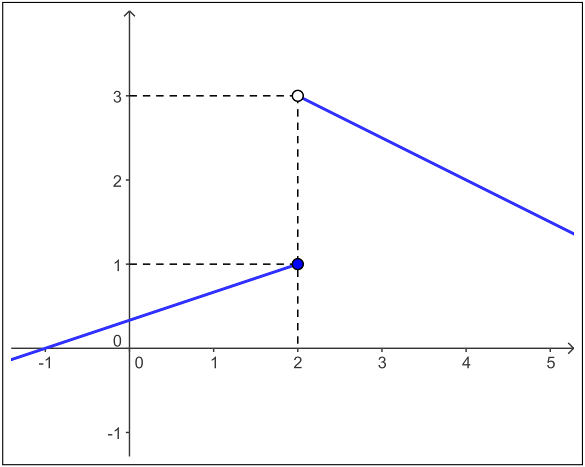
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



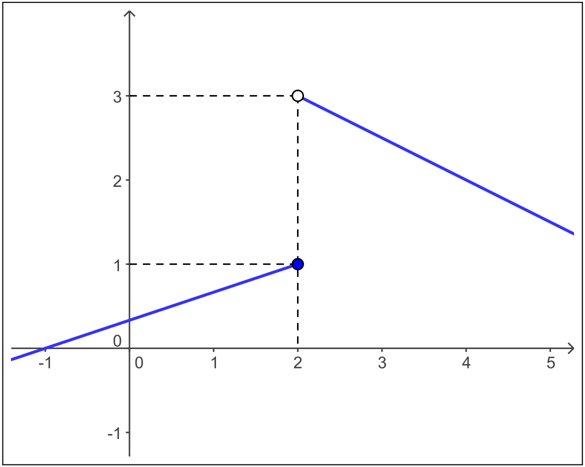
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



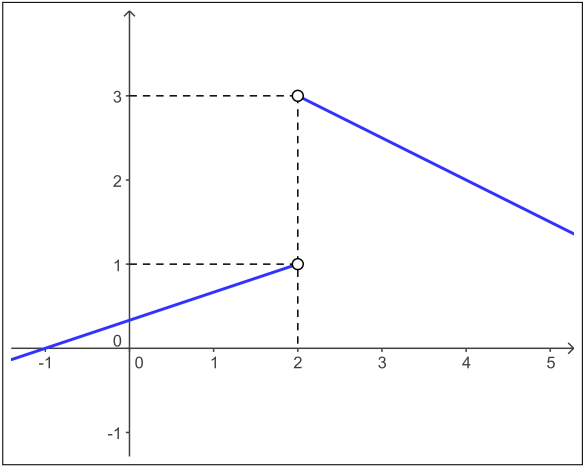
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



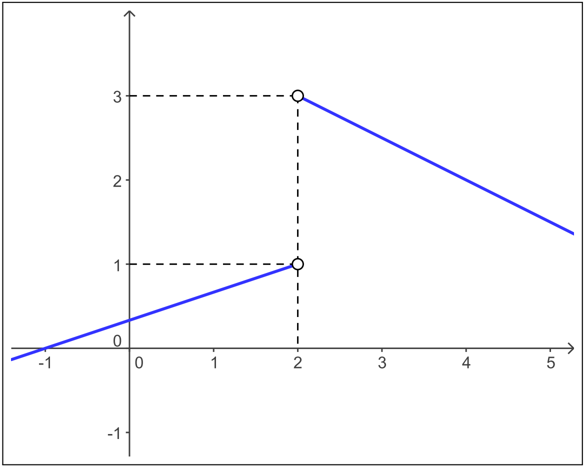
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



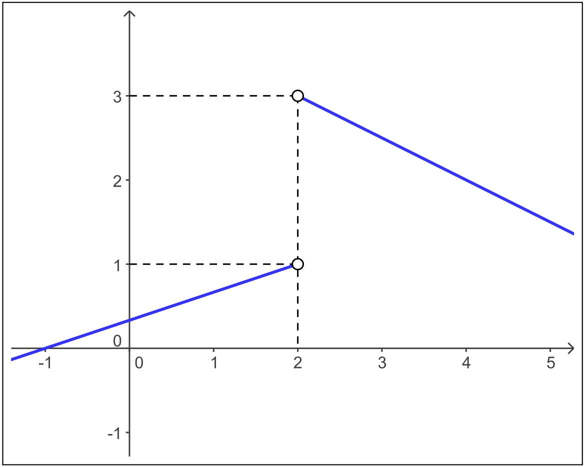
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



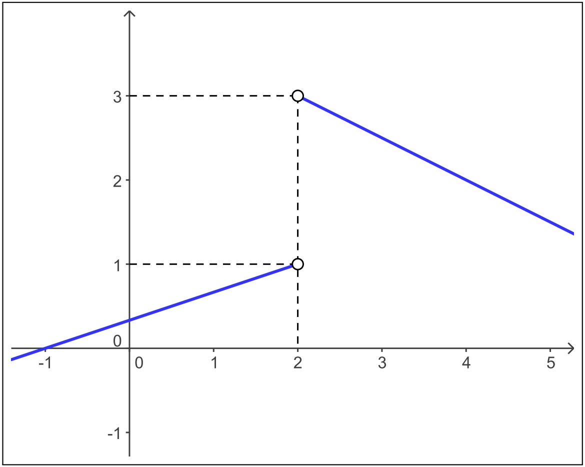
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



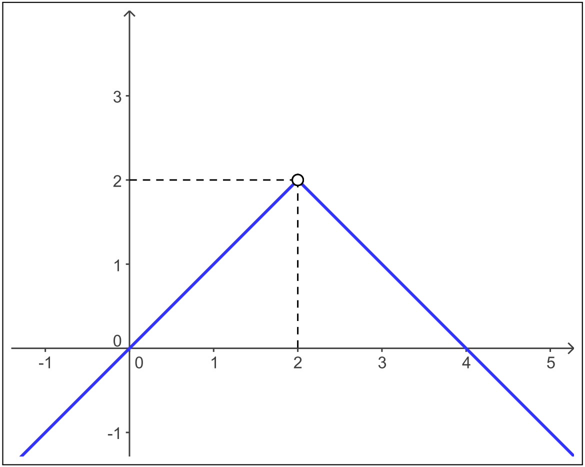
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



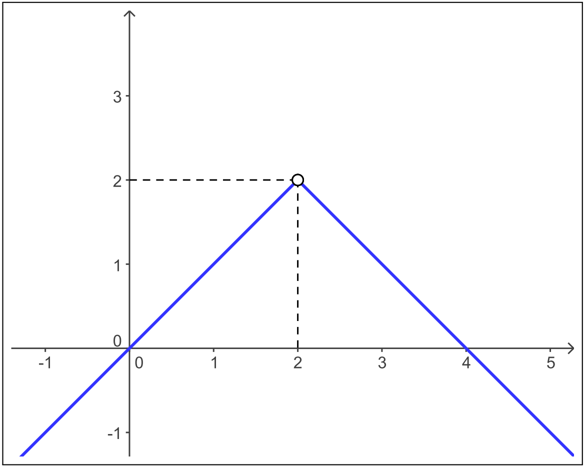
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



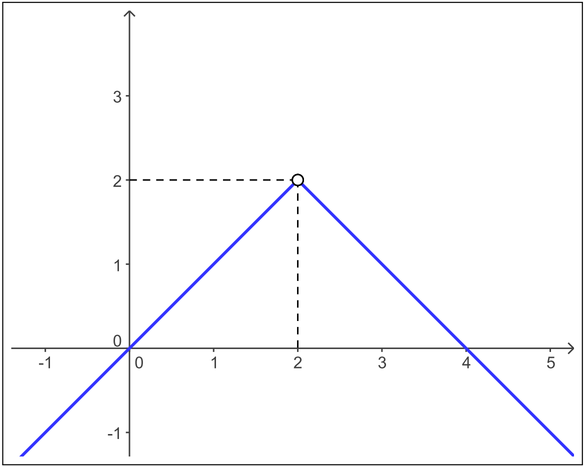
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



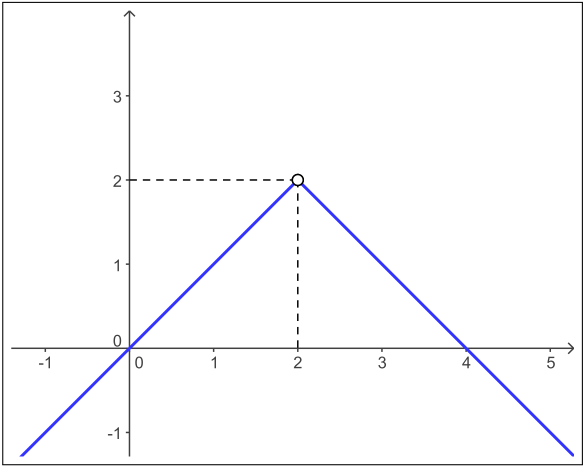
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



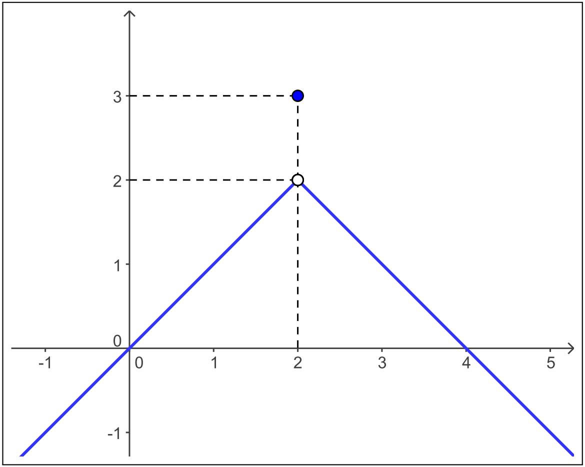
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



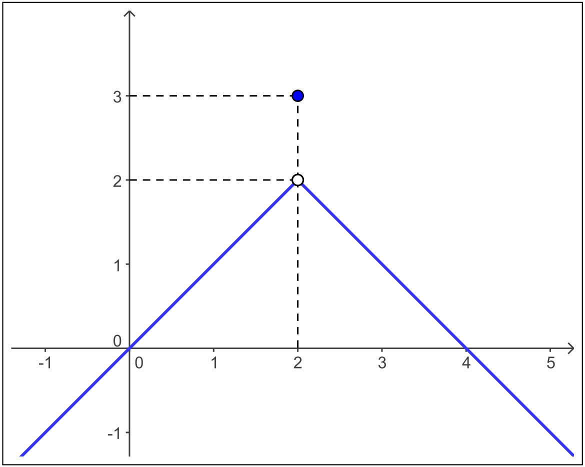
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



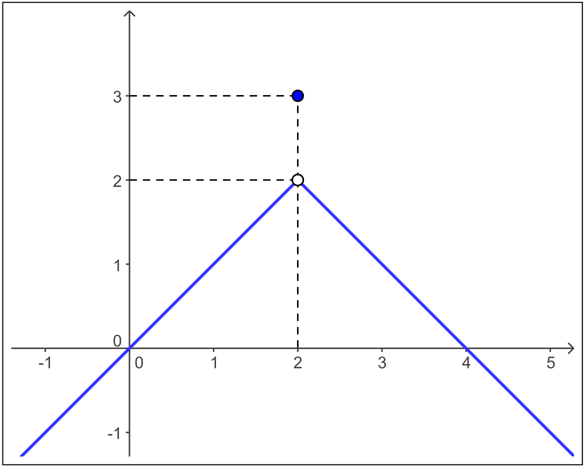
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



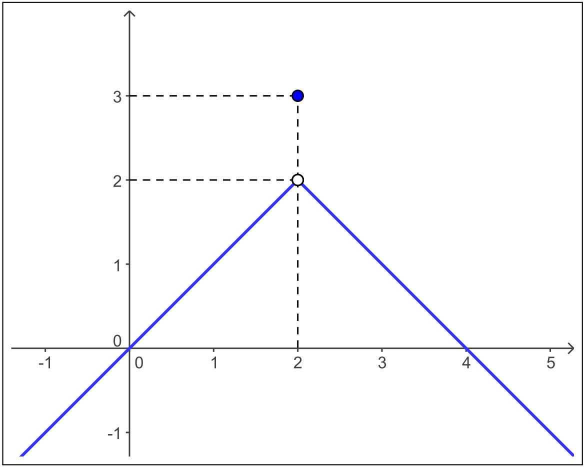
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



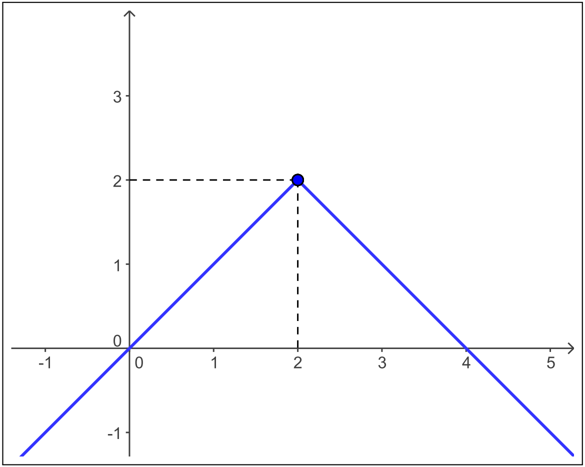
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



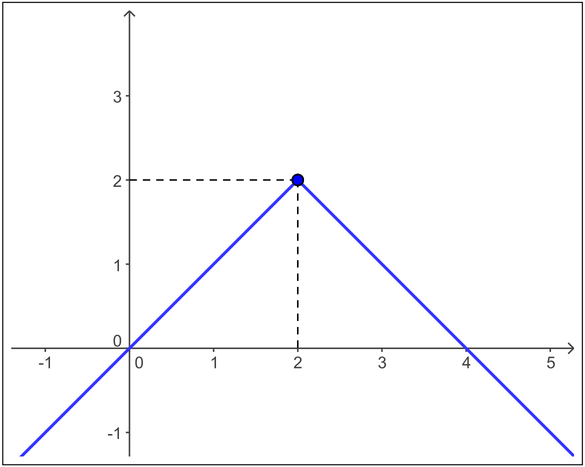
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



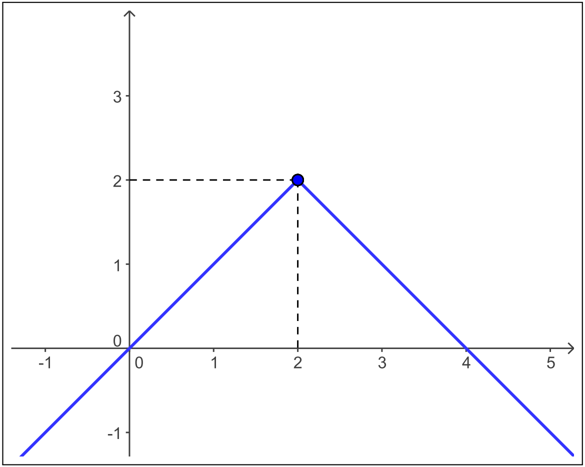
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



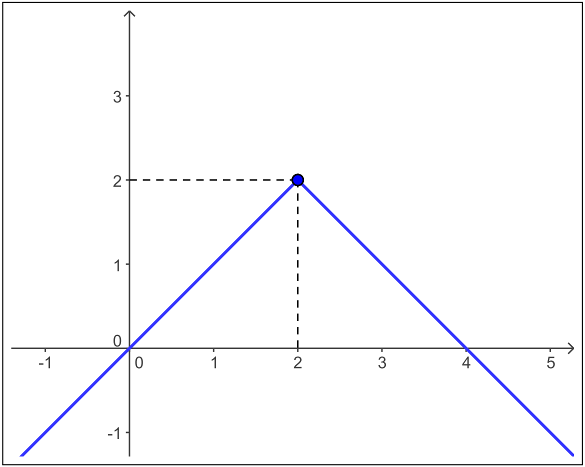
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



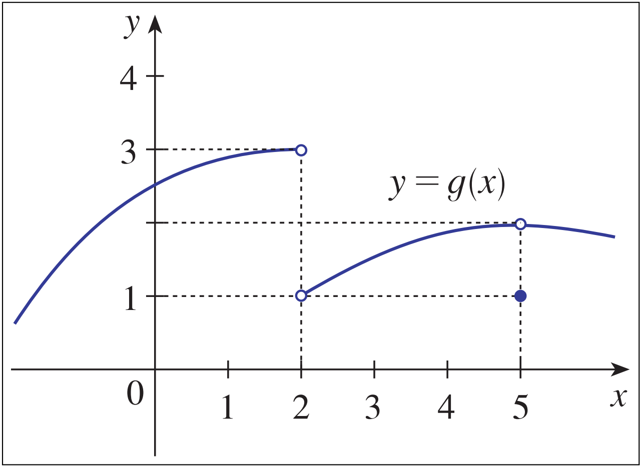
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo

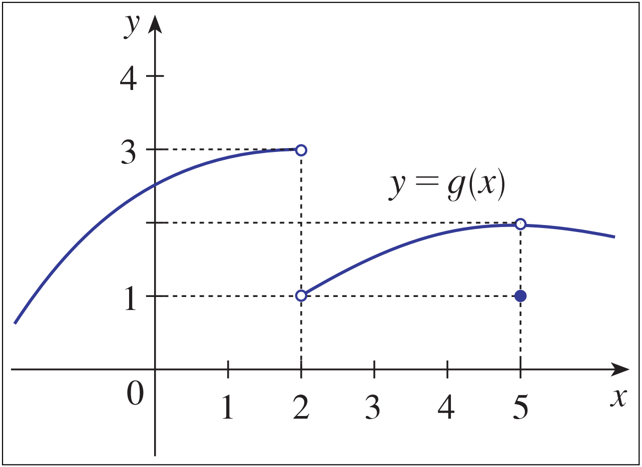


$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo

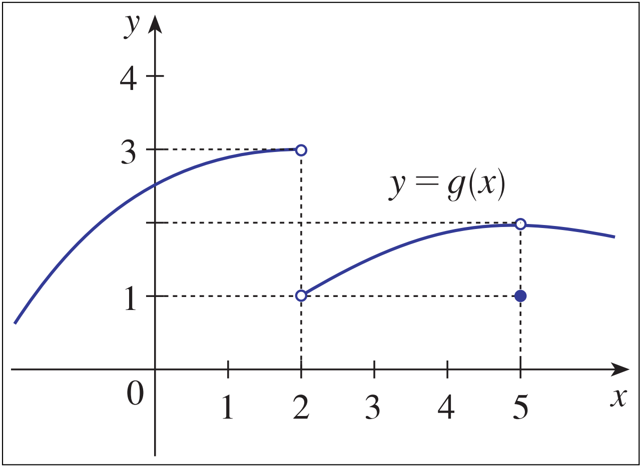


$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 3,$ $\quad \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 1,$ $\quad \lim\limits_{x \to 2} g(x)$ não existe.



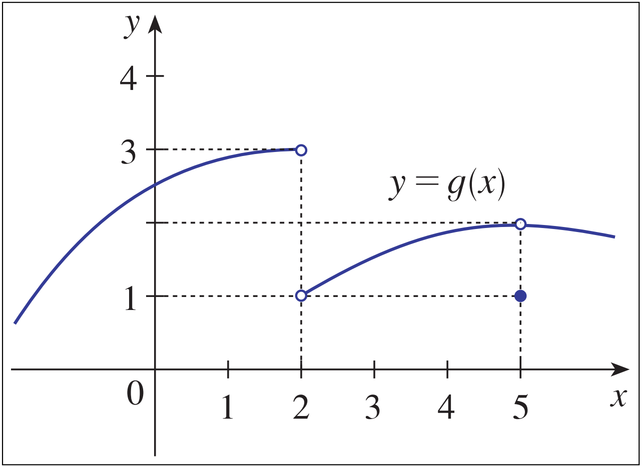
$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} g(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



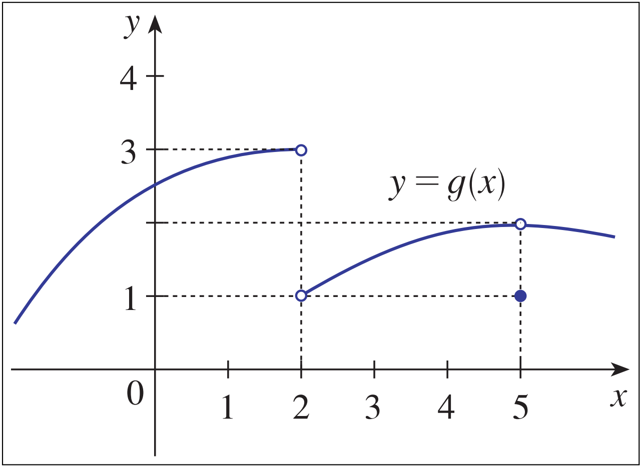
$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} g(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo

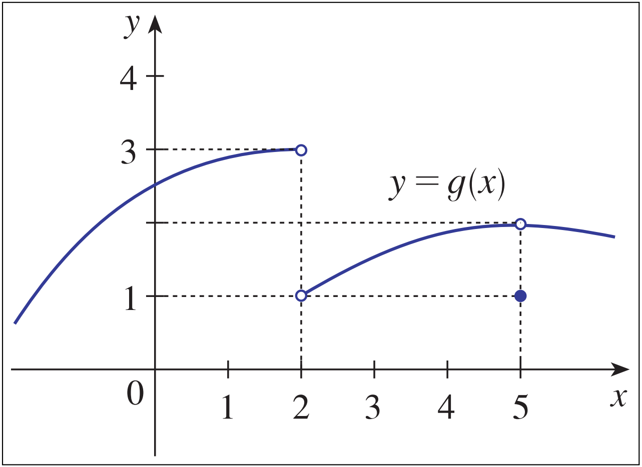


$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} g(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo

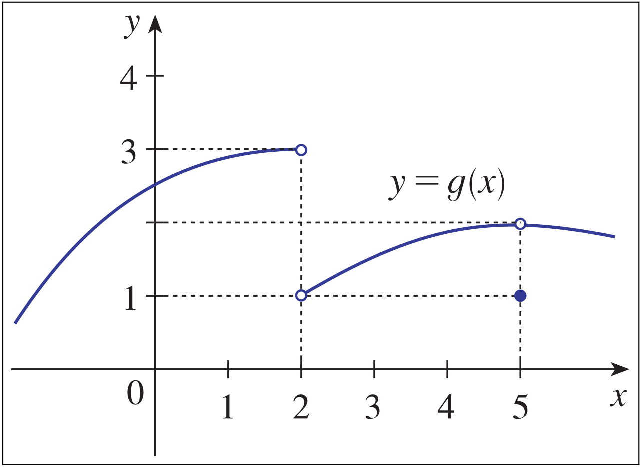


$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 5} g(x) = 2.$$



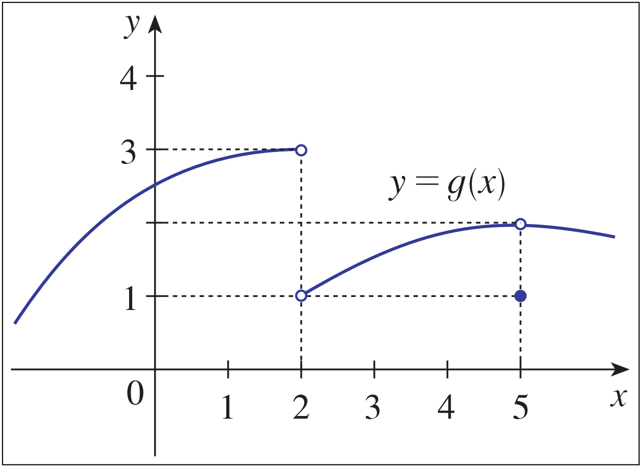
$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 5} g(x) = 2.$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5} g(x) = 2.$$

Exemplo



$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 5} g(x) = 2.$$

Novo exercício!

Como $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, segue-se que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x-1|} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Assim, precisamos estudar os limites laterais

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Novo exercício!

Como $x^2 - 5\,x + 4 = (x - 1)(x - 4)$, segue-se que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5\,x + 4}{|x - 1|} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 4)}{|x - 1|}.$$

Assim, precisamos estudar os limites laterais

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x - 4)}{|x - 1|} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x - 4)}{|x - 1|}.$$

Novo exercício!

Como $x^2 - 5\,x + 4 = (x-1)(x-4)$, segue-se que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5\,x + 4}{|x-1|} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Assim, precisamos estudar os limites laterais

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = -3 \neq +3 = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|},$$

segue-se que

não existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5\,x+4}{|x-1|}$!

Novo exercício!

Como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = -3 \neq +3 = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|},$$

segue-se que

não existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5\,x+4}{|x-1|}$!

Propriedades de limites

Proposição

Suponha que existam os limites $\lim_{x\to p} f(x)$ e $\lim_{x\to p} g(x)$. Então:

(1) O limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x).$$

(2) O limite de uma diferença é a diferença dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) - \lim_{x\to p} g(x).$$

(3) O limite de um produto é o produto dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot \mathrm{g(x)}) = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x).$$

Proposição

(4) O limite de um quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to p} f(x)}{\lim\limits_{x \to p} g(x)}.$$

(5) O limite de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes o limite da função:

$$\lim_{x \to p} (c \cdot \ \mathrm{f(x)}) = c \cdot \ \lim_{x \to p} f(x).$$

Corolário

Suponha que exista o limite $\lim\limits_{x \to p} f(x)$. Então, para todo numero inteiro $n > 0$, vale que

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} [f(x)]^n &= \lim_{x \to p} (f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)) && \text{(por (3))} \\
&= \left(\lim_{x \to p} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to p} f(x)\right) \cdots \left(\lim_{x \to p} f(x)\right) \\
&= \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n.
\end{aligned}$$

Corolário

Suponha que exista o limite $\lim_{x\to p} f(x)$. Então, para todo numero inteiro $n > 0$, vale que

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to p} f(x)\right]^n.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p} [f(x)]^n &= \lim_{x\to p} (f(x)\cdot f(x)\cdots f(x)) && \text{(por (3))}\\
&= \left(\lim_{x\to p} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to p} f(x)\right)\cdots\left(\lim_{x\to p} f(x)\right)\\
&= \left[\lim_{x\to p} f(x)\right]^n.
\end{aligned}$$

Os resultados anteriores
continuam válidos para limites laterais!

Exemplo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2\,x^2 - 3\,x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2\,x^2) - \lim_{x\to 5}(3\,x) + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\,(5)^2 - 3\,(5) + 4 \;=\; 39.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2\,x^2 - 3\,x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2\,x^2) - \lim_{x \to 5} (3\,x) + \lim_{x \to 5} 4 \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \\
&= 2\,(5)^2 - 3\,(5) + 4 = 39.
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2\,x^2 - 3\,x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2\,x^2) - \lim_{x \to 5} (3\,x) + \lim_{x \to 5} 4 \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \\
&= 2\,(5)^2 - 3\,(5) + 4 \;=\; 39.
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2\,x^2 - 3\,x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2\,x^2) - \lim_{x\to 5}(3\,x) + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\,(5)^2 - 3\,(5) + 4 \quad = \quad 39.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2\,x^2 - 3\,x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2\,x^2) - \lim_{x\to 5}(3\,x) + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\,(5)^2 - 3\,(5) + 4 \;=\; 39.
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2\,x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3\,x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2\,(-2)^2 - 1}{5 - 3\,(-2)} = -\frac{1}{11}.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3 + 2\,x^2 - 1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5 - 3\,x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^3 + 2 \lim\limits_{x\to -2} x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 1}{\lim\limits_{x\to -2} 5 - 3 \lim\limits_{x\to -2} x}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2\,(-2)^2 - 1}{5 - 3\,(-2)} = -\frac{1}{11}.$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} &= \frac{\displaystyle\lim_{x \to -2} (x^3 + 2\,x^2 - 1)}{\displaystyle\lim_{x \to -2} (5 - 3\,x)} \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\displaystyle\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} \\
&= \frac{(-2)^3 + 2\,(-2)^2 - 1}{5 - 3\,(-2)} = -\frac{1}{11}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

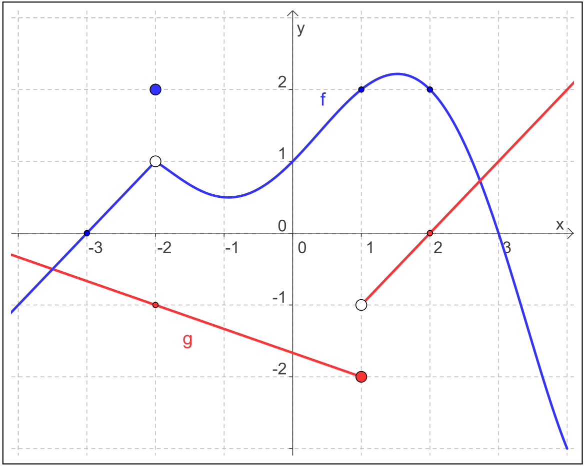
$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} &= \frac{\displaystyle\lim_{x \to -2} (x^3 + 2\,x^2 - 1)}{\displaystyle\lim_{x \to -2} (5 - 3\,x)} \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\displaystyle\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} \\
&= \frac{(-2)^3 + 2\,(-2)^2 - 1}{5 - 3\,(-2)} = -\frac{1}{11}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

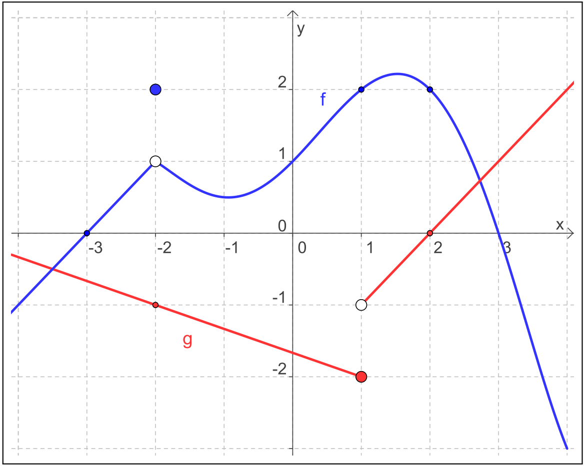
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to -2} (x^3 + 2\,x^2 - 1)}{\displaystyle\lim_{x \to -2} (5 - 3\,x)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\displaystyle\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2\,(-2)^2 - 1}{5 - 3\,(-2)} = -\frac{1}{11}.$$

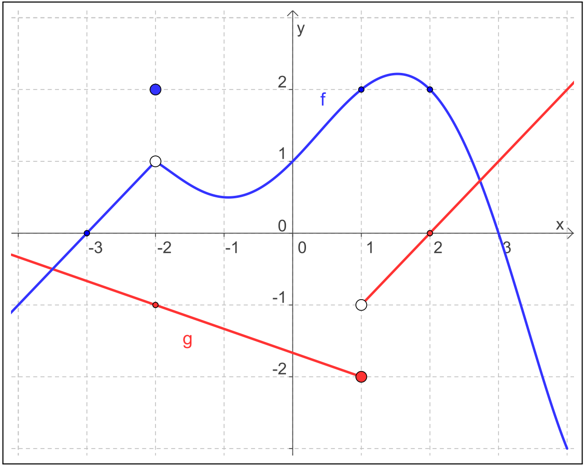


$$\lim_{x\to -2}[f(x) + 5\,g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + 5 \lim_{x\to -2} g(x) = 1 + 5\,(-1) = -4.$$



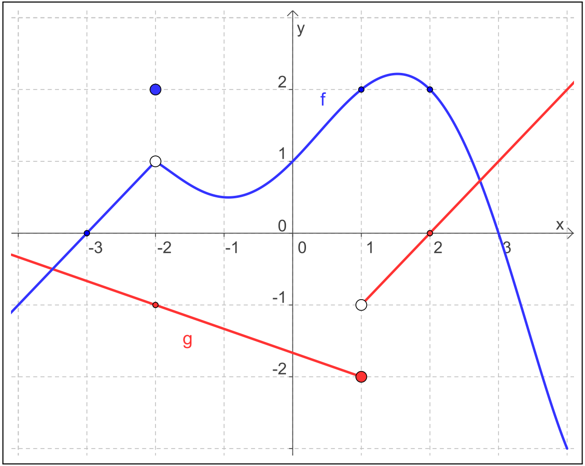
$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5\,g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) = 1+5\,(-1) = -4.$$

Exemplo



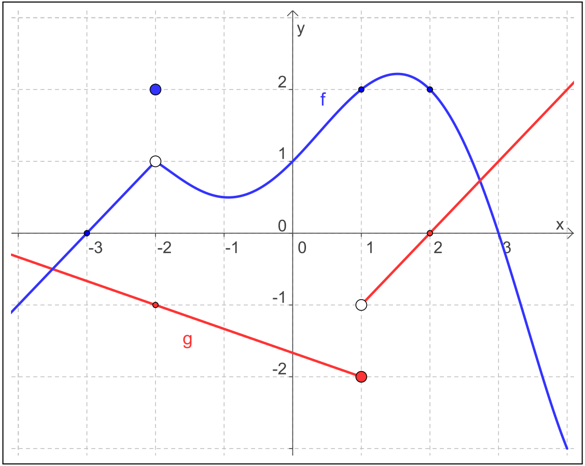
$$\lim_{x \to -2} [f(x) + 5\,g(x)] = \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) = 1 + 5\,(-1) = -4.$$

Exemplo



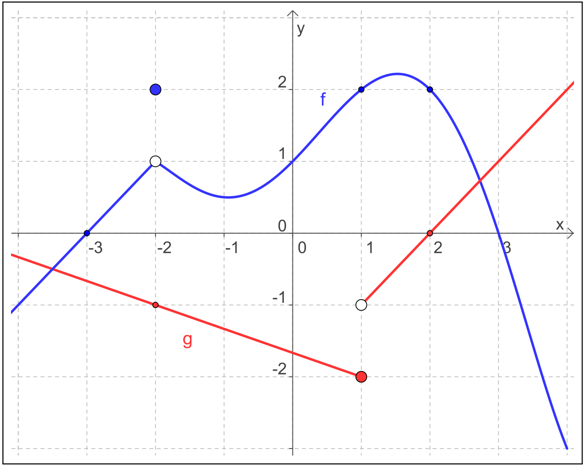
$$\lim_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$$ não existe!

Exemplo



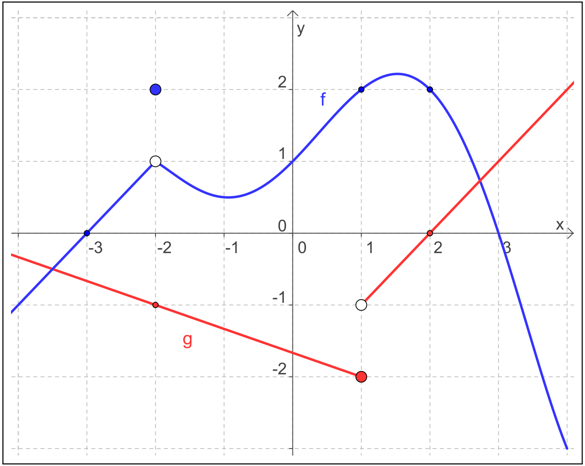
$\lim_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ não existe!

Exemplo



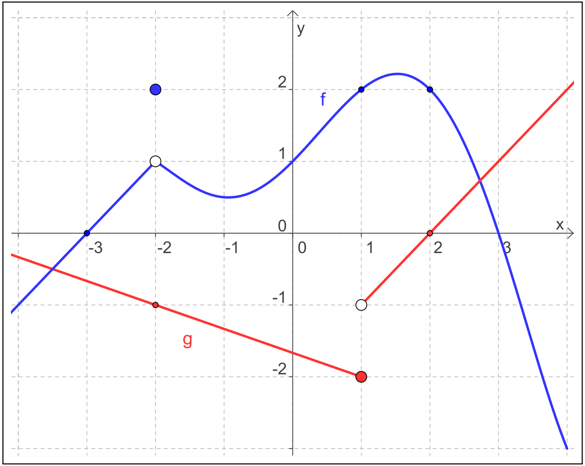
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)].$

Exemplo



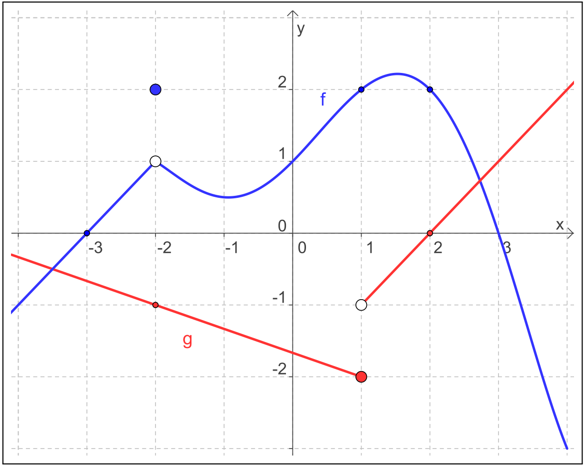
pois $\lim_{x\to 1^-} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x) \cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim_{x\to 1^+} [f(x)\cdot g(x)].$

Exemplo



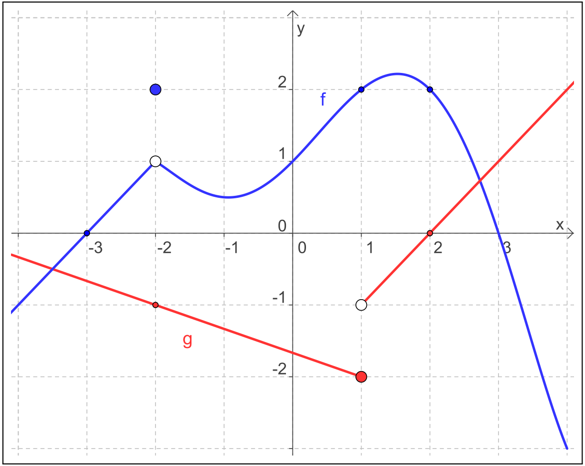
pois $\lim_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)].$

Exemplo



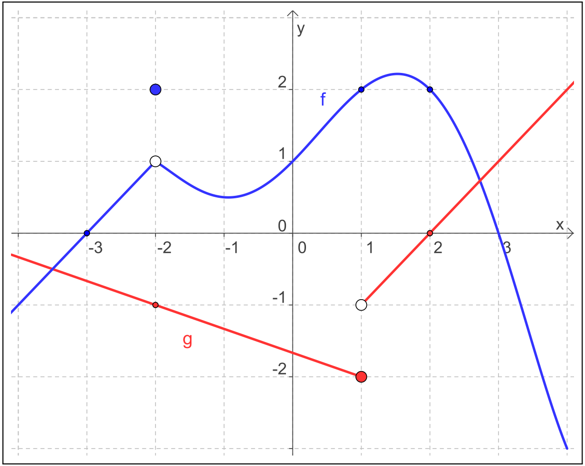
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)].$

Exemplo



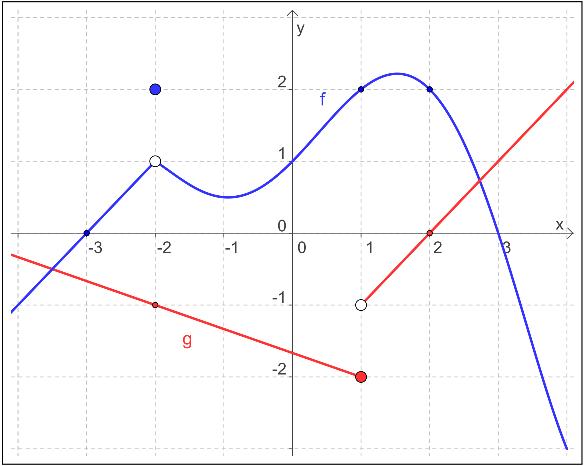
pois $\lim_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)].$

Exemplo



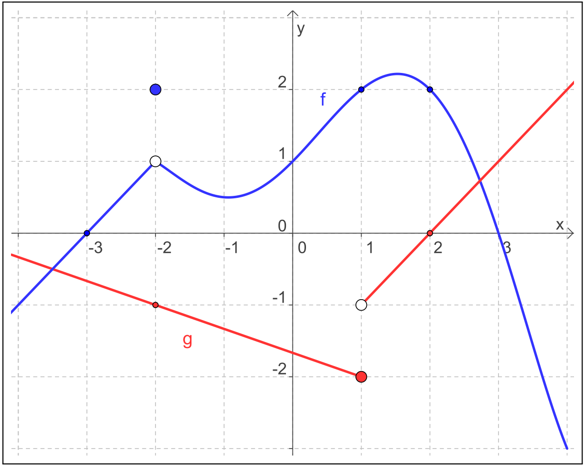
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)]$.

Exemplo

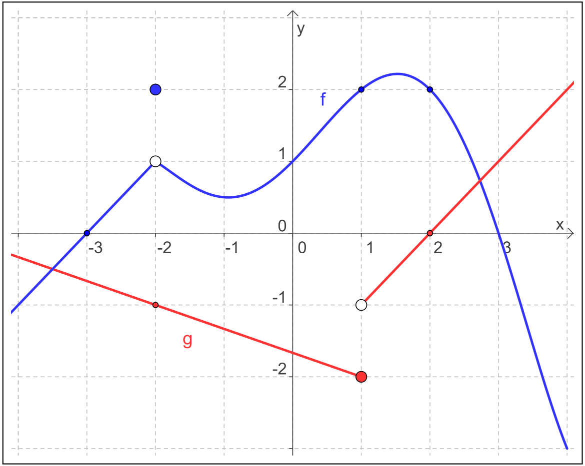


pois $\lim_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)].$

Exemplo

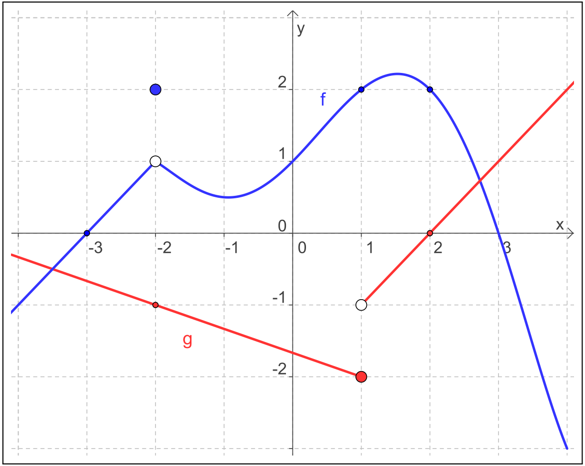


$$\lim_{x\to 2}(g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to 2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to 2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$



$$\lim_{x \to 2} (g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x \to 2} g(x)\right) / \left(\lim_{x \to 2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 2}(g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to 2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to 2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

O teorema do confronto

O teorema do confronto

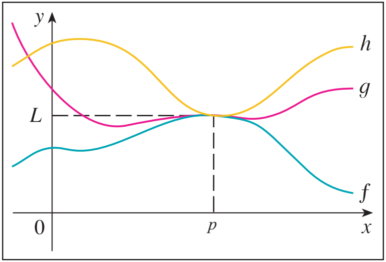
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

O teorema do confronto

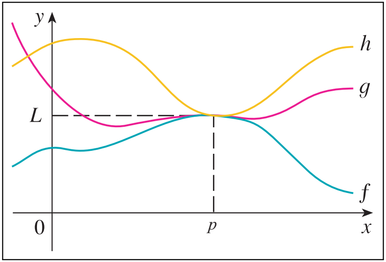
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \longrightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

Como $\lim_{x \longrightarrow 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \longrightarrow 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq +x^2$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

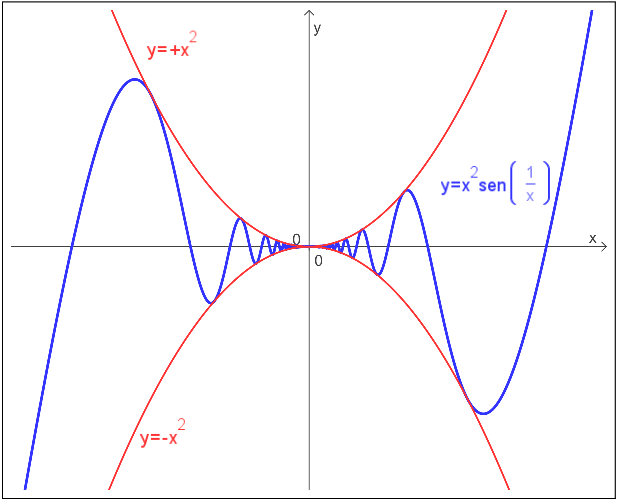
Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo



Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \ \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \quad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

$$\text{mas} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ não existe!}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \quad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

$$\text{mas} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ não existe!}$$

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0,\ \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

$$\text{mas} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ não existe!}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \ \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

$$\text{mas} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ não existe!}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \ \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

$$\text{mas} \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ não existe!}$$

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

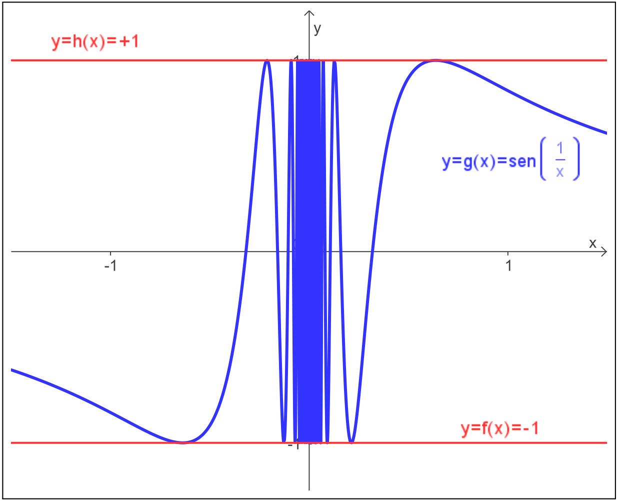
$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \ \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

$$\text{mas} \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ não existe!}$$

Verdadeiro ou falso?



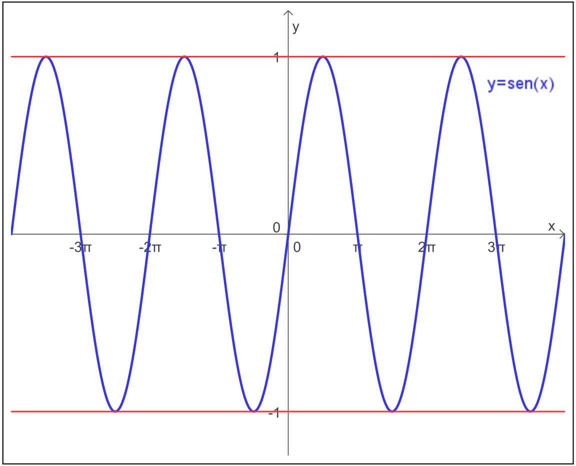
O teorema do anulamento

Definição

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é limitada em um conjunto D se existe uma constante $M > 0$ tal que, para todo $x \in D$,

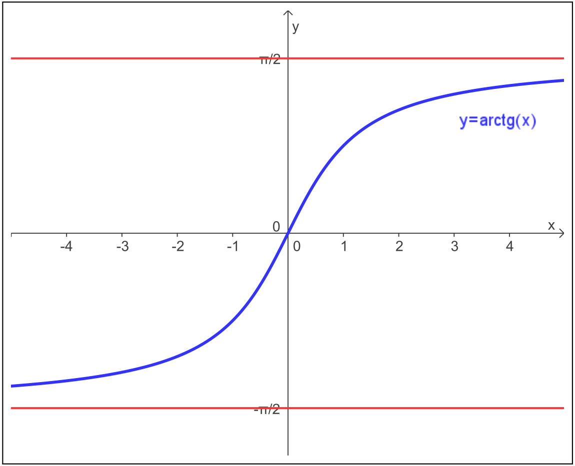
$$-M \leq f(x) \leq +M.$$

$$y = \text{sen}(x) \text{ é limitada em } D = \mathbb{R}.$$

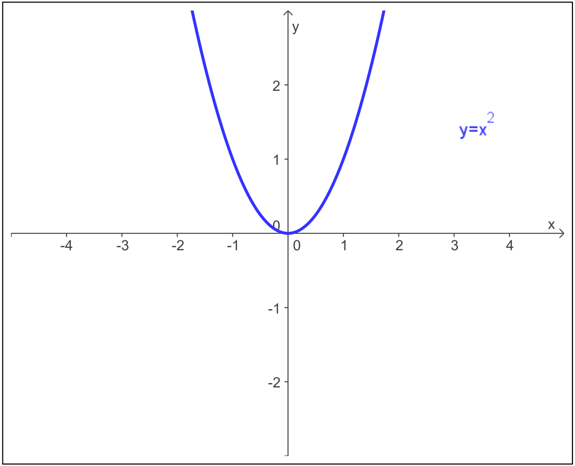


Exemplo

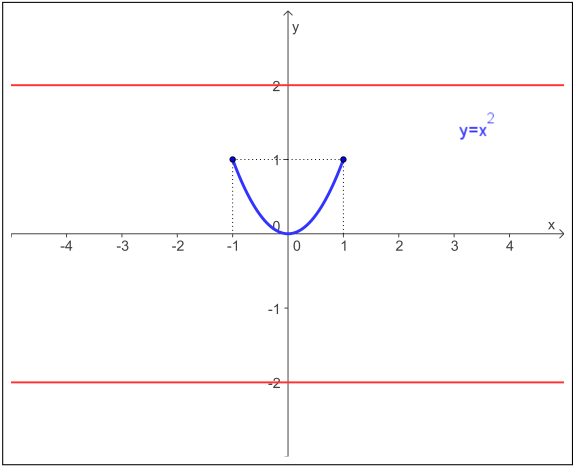
$$y = \text{arctg}(x) \text{ é limitada em } D = \mathbb{R}.$$



$$y = x^2 \text{ } \textcolor{red}{\text{não é}} \text{ limitada em } D = \mathbb{R}.$$

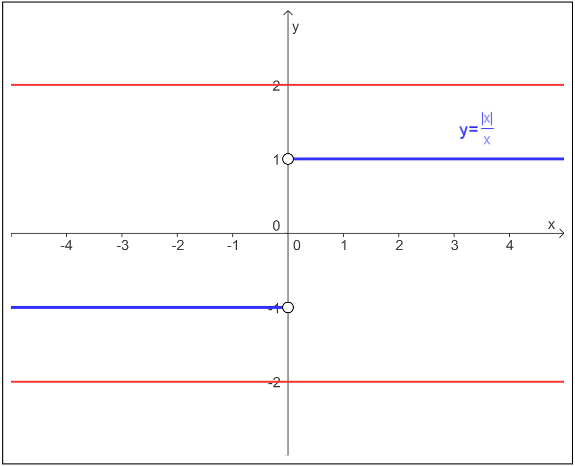


Mas $y = x^2$ é limitada em $D = [-1, +1]$.



Exemplo

$$y = |x|/x \text{ é limitada em } D = \mathbb{R}.$$



Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0} x^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \text{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \text{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Falso!

Tome $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} \quad$ e $\quad g(x) = x. \qquad$ Note que $\lim\limits_{x\to} g(x) = 0,$

mas $\qquad \lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0.$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Falso!

Tome $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$. Note que $\lim_{x\to} g(x) = 0$,

mas $$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot x = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0.$$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Falso!

Tome $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x$. Note que $\lim_{x \to} g(x) = 0$,

mas $\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cdot x = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \neq 0.$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ existe.}$$

Falso!

Tome $\quad f(x) = \dfrac{|x|}{x^2} \quad$ e $\quad g(x) = x. \quad$ Note que $\lim_{x \to} g(x) = 0$,

mas $\quad \lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2} \cdot x = \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ existe.}$$

Falso!

Tome $f(x) = \frac{|x|}{x^2}$ e $g(x) = x$. Note que $\lim_{x \to} g(x) = 0$,

mas $\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x^2} \cdot x = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ existe.}$$

Falso!

Tome $\quad f(x) = \dfrac{|x|}{x^2} \quad$ e $\quad g(x) = x. \qquad$ Note que $\lim\limits_{x \to} g(x) = 0$,

mas $\quad \lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2} \cdot x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x)$ existe, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ também existe.}$$

Falso!

Tome $\quad f(x) = \dfrac{|x|}{x} \quad$ e $\quad g(x) = 1. \qquad$ Note que f é limitada e $\lim\limits_{x \to} g(x) = 1$,

mas $\qquad \lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} \cdot 1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x)$ existe, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ também existe.}$$

Falso!

Tome $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e $g(x) = 1.$ Note que f é limitada e $\lim\limits_{x \to} g(x) = 1,$

mas $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} \cdot 1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x)$ existe, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ também existe.}$$

Falso!

Tome $\quad f(x) = \dfrac{|x|}{x} \quad$ e $\quad g(x) = 1. \qquad$ Note que f é limitada e $\lim\limits_{x \to} g(x) = 1$,

mas $$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \cdot 1 = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \text{ não existe.}$$

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$ e, conseqüentemente, $\lim_{x \to p}(-|f(x)|) = 0$. Usando o teorema do confronto com $g(x) = -|f(x)|$ e $h(x) = +|f(x)|$, concluímos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$ e, conseqüentemente, $\lim_{x \to p}(-|f(x)|) = 0$. Usando o teorema do confronto com $g(x) = -|f(x)|$ e $h(x) = +|f(x)|$, concluímos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$ e, conseqüentemente, $\lim_{x \to p}(-|f(x)|) = 0$. Usando o teorema do confronto com $g(x) = -|f(x)|$ e $h(x) = +|f(x)|$, concluímos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$ e, conseqüentemente, $\lim_{x \to p}(-|f(x)|) = 0$. Usando o teorema do confronto com $g(x) = -|f(x)|$ e $h(x) = +|f(x)|$, concluímos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0.$$

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$ e, conseqüentemente, $\lim_{x \to p}(-|f(x)|) = 0$. Usando o teorema do confronto com $g(x) = -|f(x)|$ e $h(x) = +|f(x)|$, concluímos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0.$$

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M \cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p} (|f(x)| \cdot |g(x)|) = \lim_{x\to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p} (f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p} |f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p}(|f(x)|\cdot|g(x)|) = \lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x \to p} 0 = 0$ e $\lim_{x \to p} (M \cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x \to p} (|f(x)| \cdot |g(x)|) = \lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p} (f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p} |f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por $|g(x)|$, obtemos que

$$0 = 0\cdot |g(x)| \leq |f(x)|\cdot |g(x)| \leq M\cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p} (|f(x)|\cdot |g(x)|) = \lim_{x\to p} |f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por $|g(x)|$, obtemos que

$$0 = 0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x \to p} 0 = 0$ e $\lim_{x \to p} (M \cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x \to p} (|f(x)| \cdot |g(x)|) = \lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x \to p} 0 = 0$ e $\lim_{x \to p} (M \cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x \to p} (|f(x)| \cdot |g(x)|) = \lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x \to p} 0 = 0$ e $\lim_{x \to p}(M \cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x \to p} (|f(x)| \cdot |g(x)|) = \lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p}(|f(x)|\cdot|g(x)|) = \lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x \to p} 0 = 0$ e $\lim_{x \to p} (M \cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x \to p} (|f(x)| \cdot |g(x)|) = \lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M \cdot |g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p} (|f(x)| \cdot |g(x)|) = \lim_{x\to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p}(|f(x)|\cdot|g(x)|) = \lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$