Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 7

2 de abril de 2009

Problemas de organização e erros frequentes

Calcule os limites

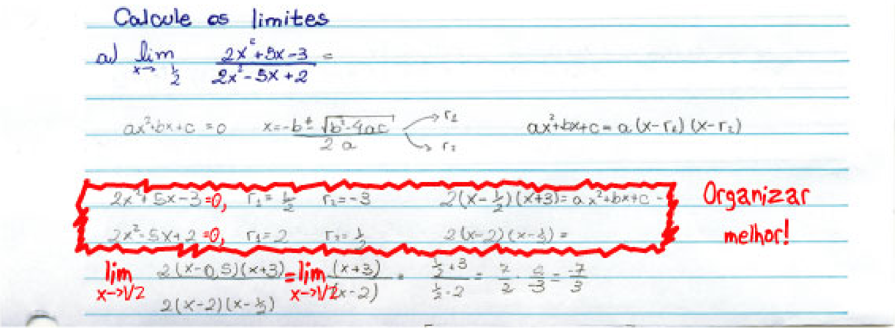
a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2} =$

$ax^2+bx+c=0 \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases} \qquad ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$

$2x^2+5x-3 \qquad r_1 = \frac{1}{2} \qquad r_2 = -3 \qquad 2(x-\frac{1}{2})(x+3) = ax^2+bx+c$ -

$2x^2-5x+2 \qquad r_1 = 2 \qquad r_2 = \frac{1}{2} \qquad 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) =$

$\dfrac{2(x-0{,}5)(x+3)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})} \qquad \dfrac{(x+3)}{(x-2)} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-2} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{-3} = \dfrac{-7}{3}$


Calcule os limites
a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2} =$
$ax^2+bx+c=0$ $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ r_1 r_2 $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$
$2x^2+5x-3=0$, $r_1=\frac{1}{2}$ $r_2=-3$ $2(x-\frac{1}{2})(x+3)=ax^2+bx+c$
$2x^2-5x+2=0$, $r_1=2$ $r_2=\frac{1}{2}$ $2(x-2)(x-\frac{1}{2})=$
Organizar melhor!
$\lim_{x \to 1/2} \frac{2(x-0,5)(x+3)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x \to 1/2} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{-3} = \frac{-7}{3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

$(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})$ $\quad$ $(\sqrt{x+6})+\sqrt{2}$

$$= \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6})}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+6}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x+6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} \quad // \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6}}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})}{} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+6}+\sqrt{2})}{} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+6}+\sqrt{2})} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x+6}+\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} \quad // \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

$(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})$ $\quad$ $(\sqrt{x+6})+\sqrt{2}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+6}+\sqrt{2})}\right]$$

2 $\qquad$ 6

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x+6}+\sqrt{2}}\right]$$

2 $\qquad$ 6

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} \;//\; = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+6}+\sqrt{2})}\right]$$

2 6

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{x}{x\sqrt{x+6}+\sqrt{2}}\right]$$

2 6

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} \;\boxed{//}\; = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Notação?

denominador

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}$ $\quad 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

numerador

$2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{7/2}{-3/2} = -\frac{7}{3}$$

(a) $\boxed{\lim_{x \to \frac{1}{2}}}$

Perdido no texto!

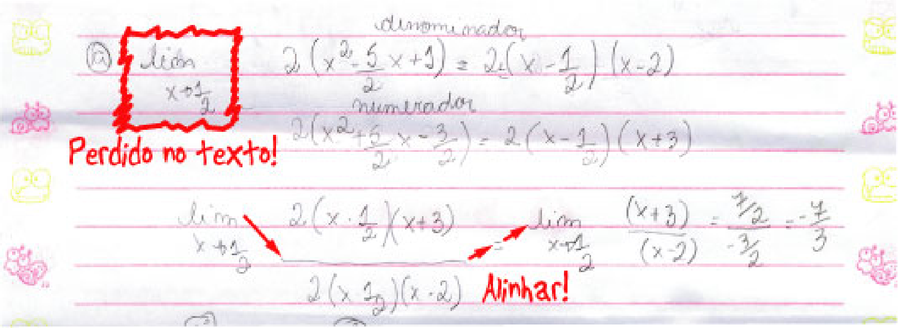
denominador

$2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

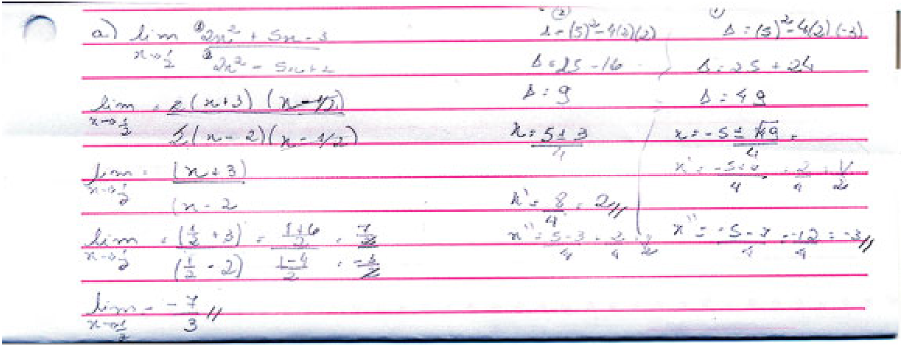
numerador

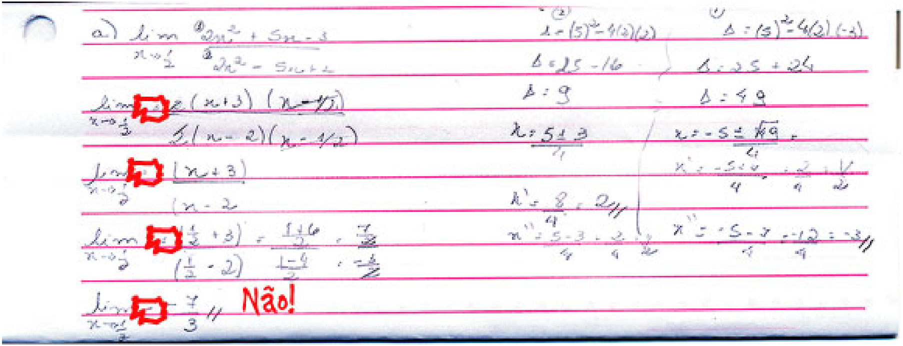
$2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{7/2}{-3/2} = -\frac{7}{3}$$


Perdido no texto!
Alinhar!

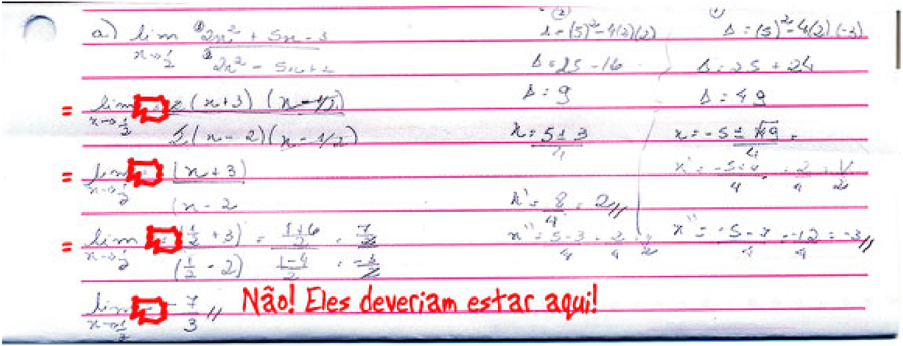
Problemas de organização e erros frequentes

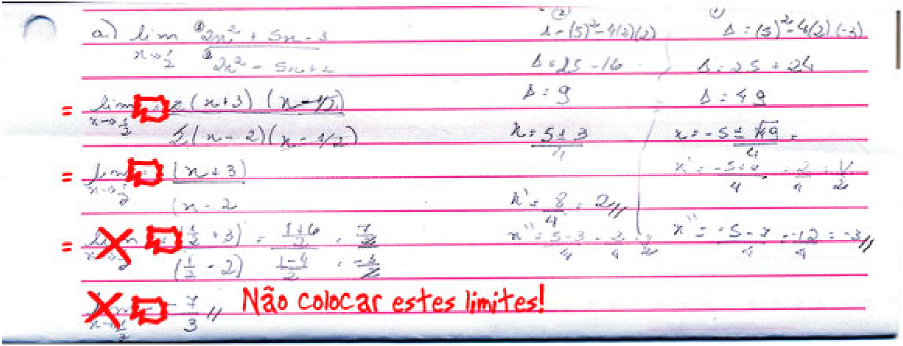




a) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$
$\Delta=(5)^2-4(2)(2)$
$\Delta=25-16$
$\Delta=9$
$x=\frac{5\pm 3}{4}$
$x'=\frac{8}{4}=2$
$x''=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$\Delta=(5)^2-4(2)(-3)$
$\Delta=25+24$
$\Delta=49$
$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}$
$x'=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$x''=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$
$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2(x+3)(x-1/2)}{2(x-2)(x-1/2)}$
$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x+3)}{(x-2)}$
$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2}+3)}{(\frac{1}{2}-2)} = \frac{\frac{1+6}{2}}{\frac{1-4}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{-3}{2}}$
$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{7}{3}$
Não!

Problemas de organização e erros frequentes





a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2(x+3)(x-1/2)}{2(x-2)(x-1/2)}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(x+3)}{(x-2)}$

$= \cancel{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}} \dfrac{(\frac{1}{2}+3)}{(\frac{1}{2}-2)} = \dfrac{\frac{1+6}{2}}{\frac{1-4}{2}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{-3}{2}}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}} \dfrac{7}{3}$

Não colocar estes limites!

$\Delta=(5)^2-4(2)(2)$

$\Delta=25-16$

$\Delta=9$

$x=\dfrac{5\pm 3}{4}$

$x'=\dfrac{8}{4}=2$

$x''=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\Delta=(5)^2-4(2)(-3)$

$\Delta=25+24$

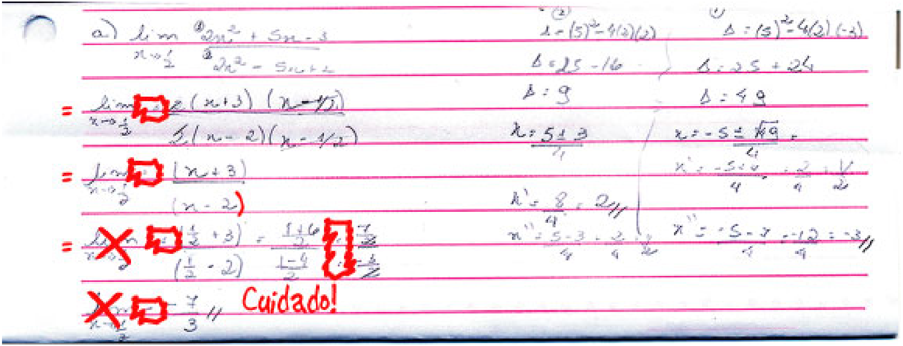
$\Delta=49$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{4}$

$x'=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$x''=\dfrac{-5-7}{4}=\dfrac{-12}{4}=-3$

Problemas de organização e erros frequentes



b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\right] \to$$

$$\to \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right] \to$$

$$\to \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$ É para usar = e não →!

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\right] \boxed{\to}$$

$$\boxed{\to}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right] \boxed{\to}$$

$$\boxed{\to}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Os teoremas do confronto e do anulamento

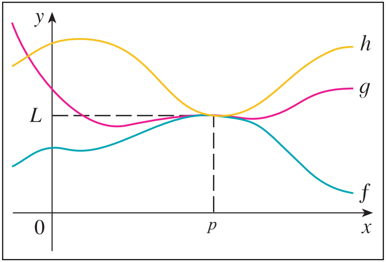
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

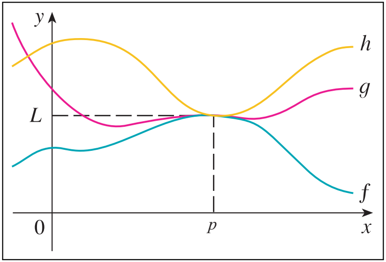
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

O teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x)^4 = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^4 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^4 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^4 = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x)^4 = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x)^4 = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

Estude $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\text{sen}(\pi/x)}$.

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \text{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\text{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\text{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\text{sen}(\pi/x)} = 0.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude} \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

Estude $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$.

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0.$$

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0.$$

Limites infinitos e assíntotas verticais

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$q(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$q(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$g(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$q(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$q(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$g(x)$
$-$ 0.1000	100
$-$ 0.0100	10 000
$-$ 0.0010	1 000 000
$-$ 0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$q(x)$
$-$ 0.1000	100
$-$ 0.0100	10 000
$-$ 0.0010	1 000 000
$-$ 0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$q(x)$
$-\ 0.1000$	100
$-\ 0.0100$	10 000
$-\ 0.0010$	1 000 000
$-\ 0.0001$	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

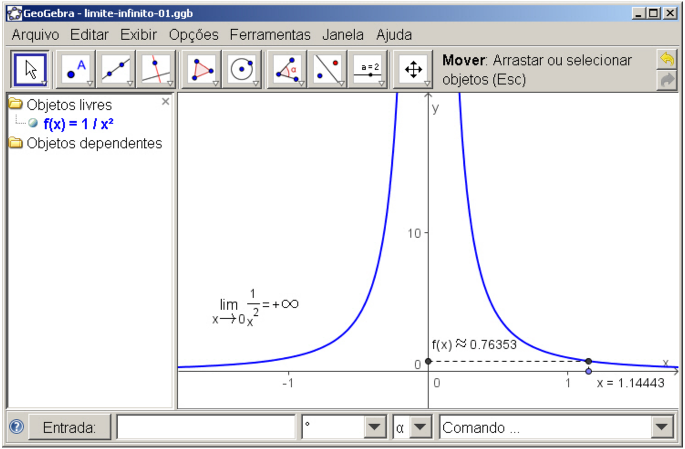
x	$q(x)$
-0.1000	100
-0.0100	$10\,000$
-0.0010	$1\,000\,000$
-0.0001	$100\,000\,000$
0.0000	não está definida
0.0001	$100\,000\,000$
0.0010	$1\,000\,000$
0.0100	$10\,000$
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$q(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$



Definição

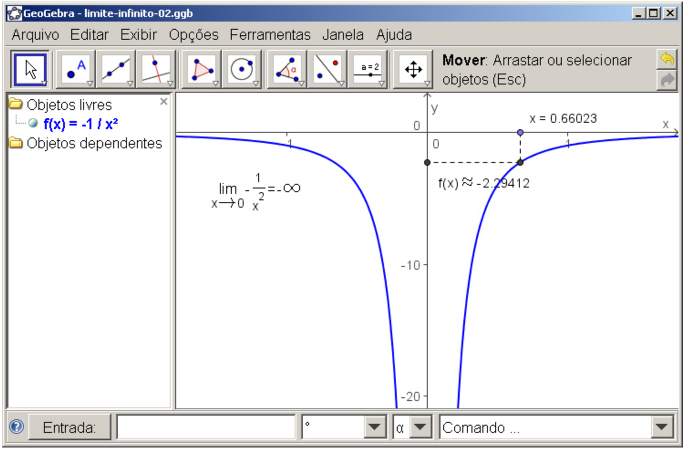
Seja f uma função definida em ambos os lados de p, exceto possivelmente em p. Dizemos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) por meio de uma escolha adequada de x nas proximidades de p, mas não igual a p.

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$



Definição

Seja f uma função definida em ambos os lados de p, exceto possivelmente em p. Dizemos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, escolhendo-se valores de x próximos de p, porém diferentes do próprio p.

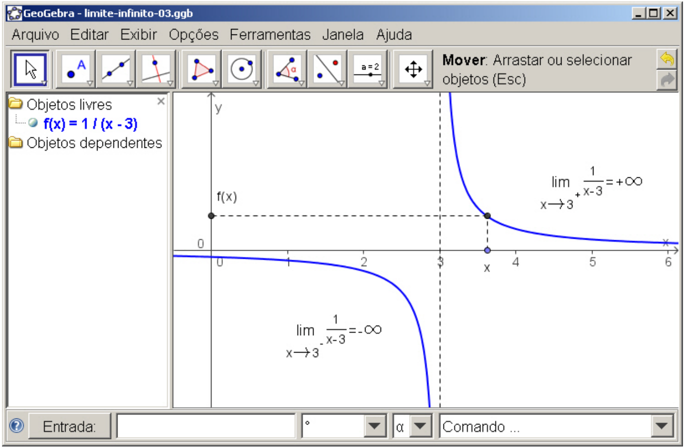
Limites laterais infinitos

Definições análogas podem ser dadas no caso de limites laterais:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$



Assíntota vertical

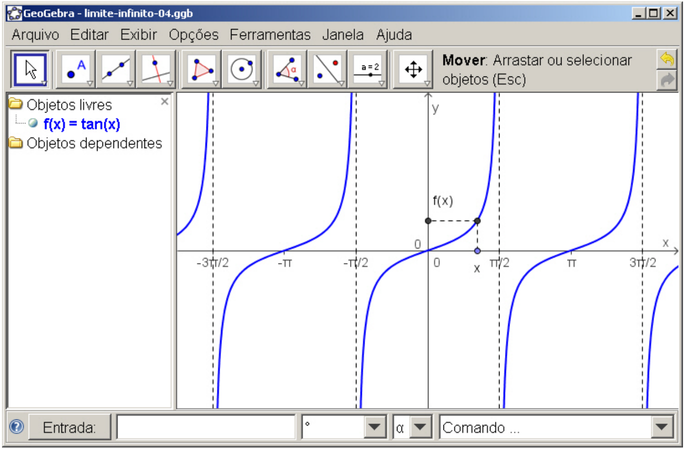
Definição

A reta $x = p$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

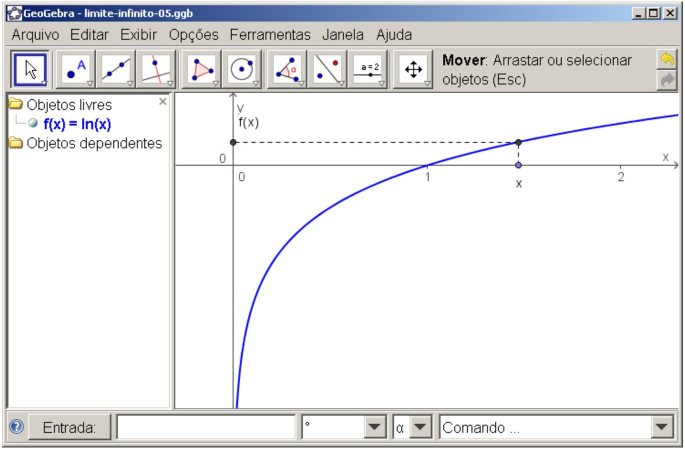
$$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty.$$

As assíntotas verticais de $y = \text{tg}(x)$ são
$x = +\pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = +3\,\pi/2$, $x = -3\,\pi/2$, etc.



A assíntota vertical de $y = \ln(x)$ é a reta $x = 0$ (o eixo y).



Determine o limite infinito $\displaystyle\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5}$.

Solução. Temos que se $x \to 5^+$, então $x - 5 \to 0^+$ e, conseqüentemente, $6/(x-5) \to +\infty$. Assim:

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5} = +\infty.$$

Determine o limite infinito $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$.

Solução. Temos que se $x \to 5^+$, então $x - 5 \to 0^+$ e, conseqüentemente, $6/(x-5) \to +\infty$. Assim:

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5} = +\infty.$$

Exercício [27] da página 101 do livro do Stewart

Determine o limite infinito $\lim\limits_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x$.

Solução. Temos que se $x \to (-\pi/2)^+$, então $\cos(x) \to 0^+$ e, conseqüentemente, $\sec(x) = 1/\cos(x) \to +\infty$. Assim:

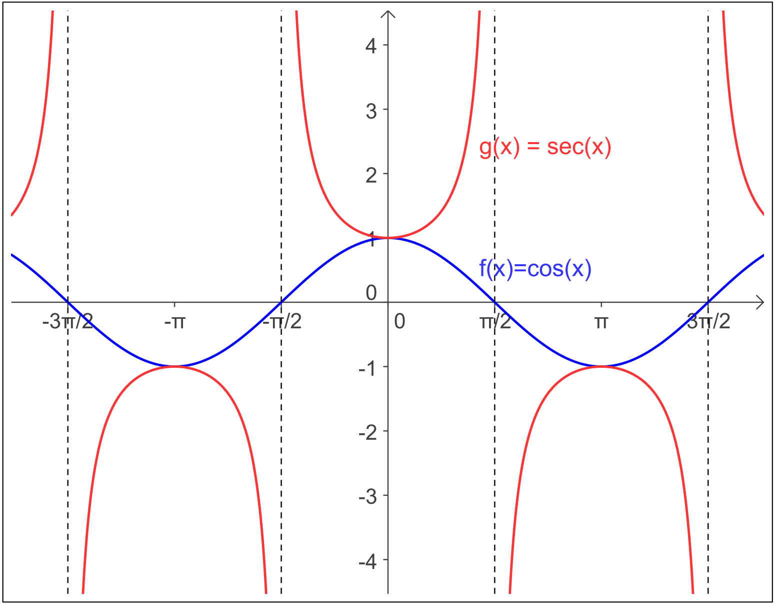
$$\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec(x) = +\infty.$$

Determine o limite infinito $\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x$.

Solução. Temos que se $x \to (-\pi/2)^+$, então $\cos(x) \to 0^+$ e, conseqüentemente, $\sec(x) = 1/\cos(x) \to +\infty$. Assim:

$$\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec(x) = +\infty.$$

Exercício [27] da página 101 do livro do Stewart



Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Para $p = -1$, temos que

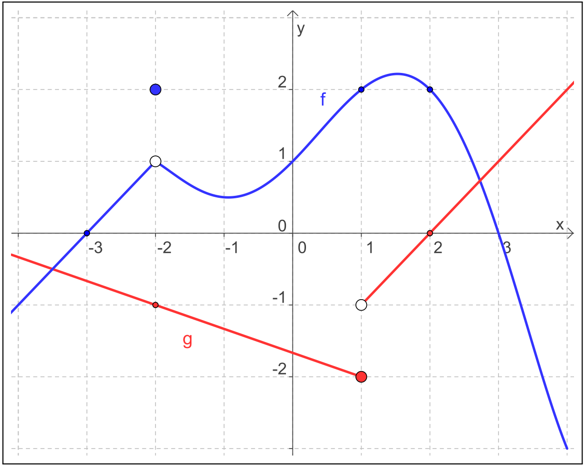
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

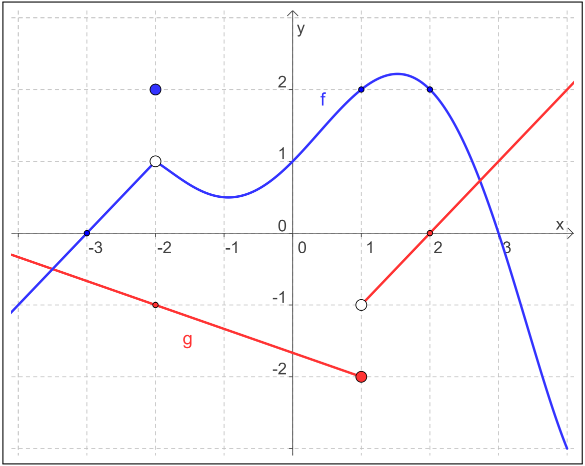
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

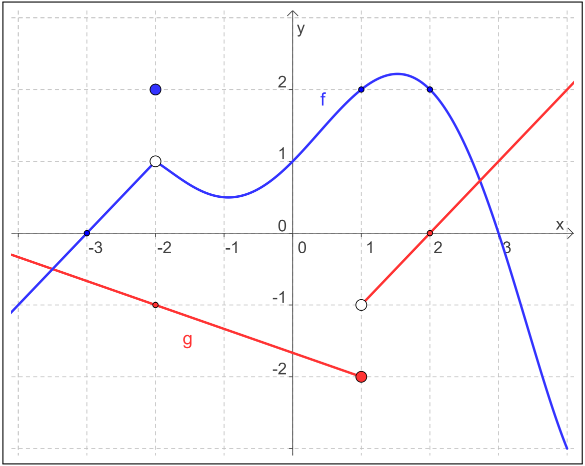


$$\lim_{x \to +2} [g(x)/f(x)] = \left(\lim_{x \to -2} g(x) \right) / \left(\lim_{x \to -2} f(x) \right) = 0/2 = 0.$$

Exemplo

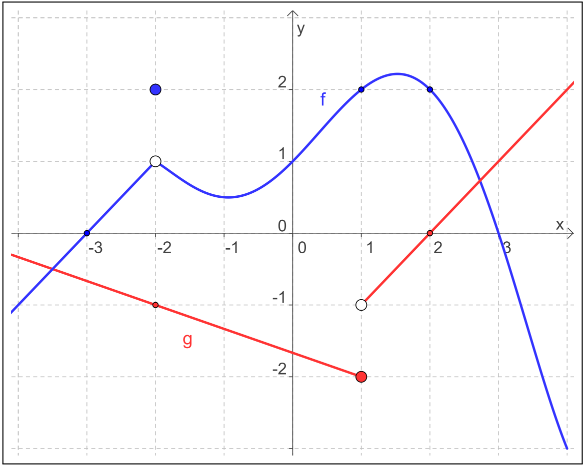


$$\lim_{x\to+2}[g(x)/f(x)] = \left(\lim_{x\to-2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to-2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

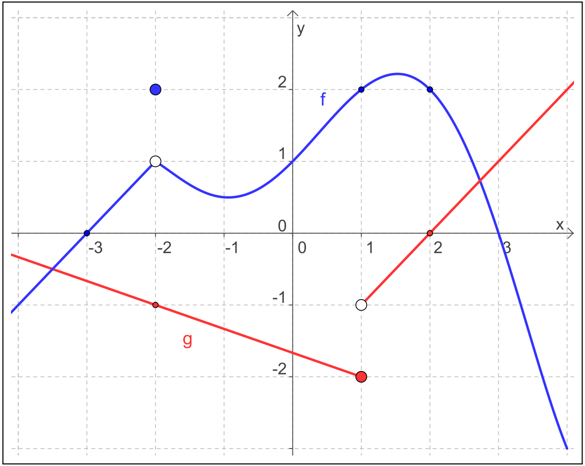


$$\lim_{x\to+2}[g(x)/f(x)] = \left(\lim_{x\to-2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to-2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

Exemplo

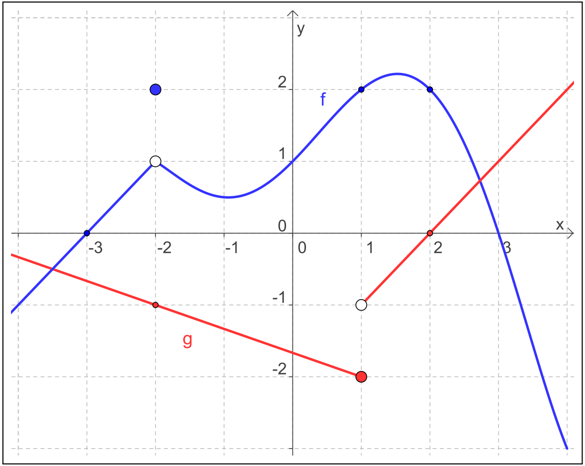


$$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty \text{ pois, quando } x \to +2^+,\ g(x) \to \quad \text{e } f(x) \to \quad .$$



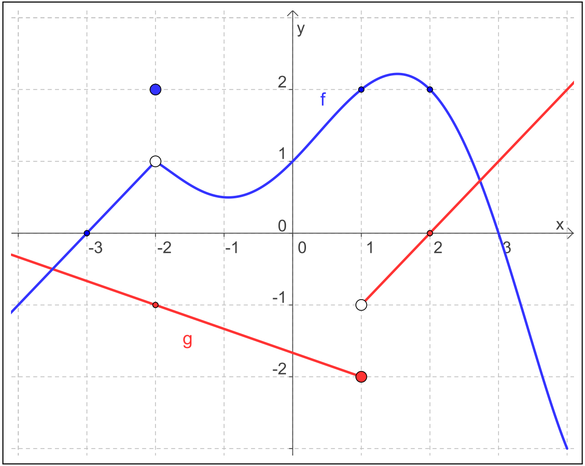
$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty$ pois, quando $x \to +2^+$, $g(x) \to 0^+$ e $f(x) \to 2^-$.

Exemplo



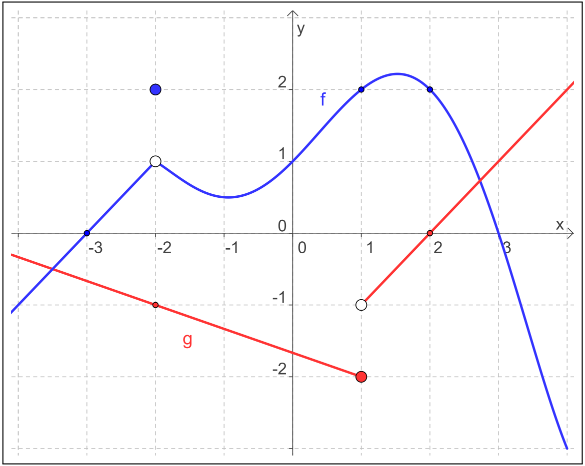
$\lim\limits_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty$ pois, quando $x \to +2^+$, $g(x) \to 0^+$ e $f(x) \to +2^-$.

Exemplo



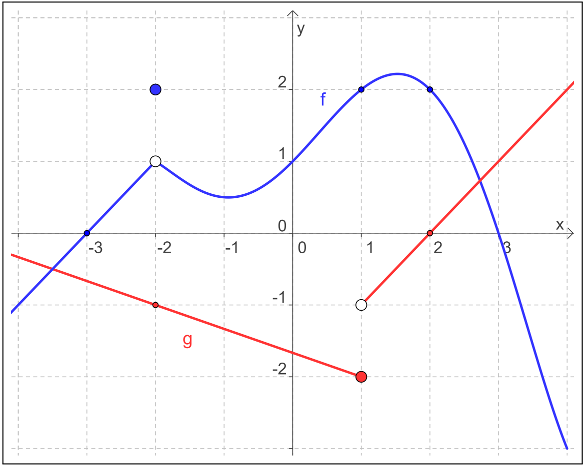
$$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty \text{ pois, quando } x \to +2^+,\ g(x) \to 0^+ \text{ e } f(x) \to +2^- .$$

Exemplo



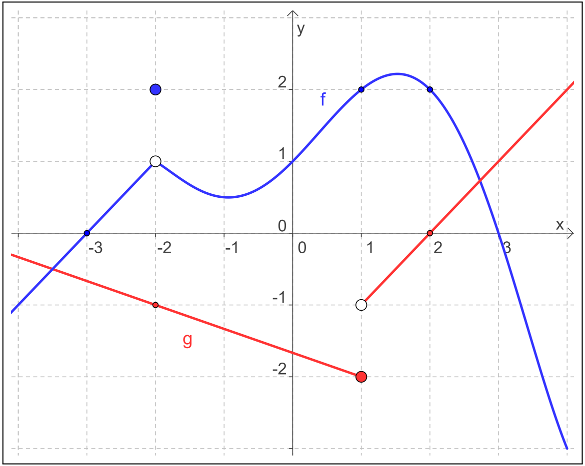
$$\lim_{x\to+2^+}[f(x)/g(x)] = +\infty \text{ pois, quando } x \to +2^+,\ g(x) \to 0^+ \text{ e } f(x) \to +2^-.$$

Exemplo



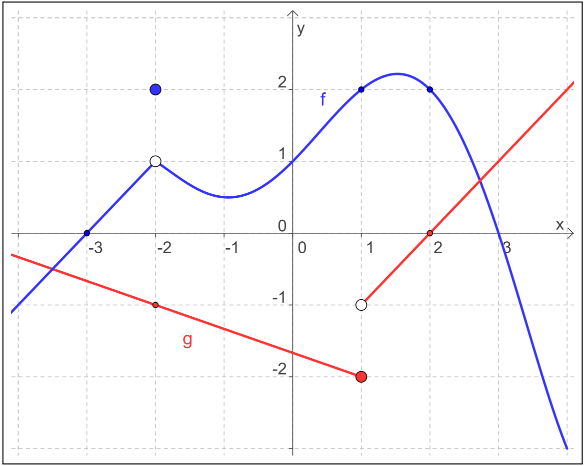
$$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] =$$

Exemplo

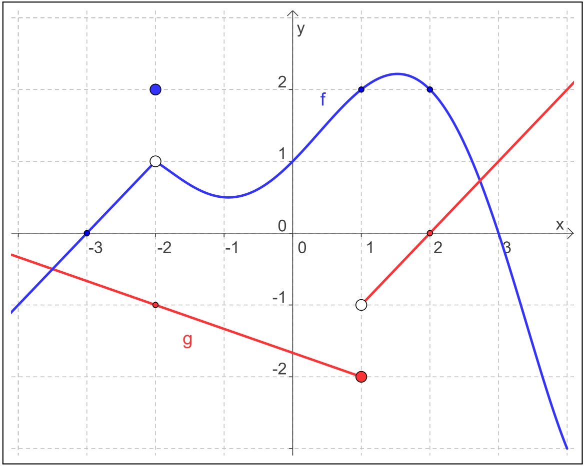


$$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty$$ pois, quando $x \to +2^-$, $g(x) \to$ e $f(x) \to$.

Exemplo

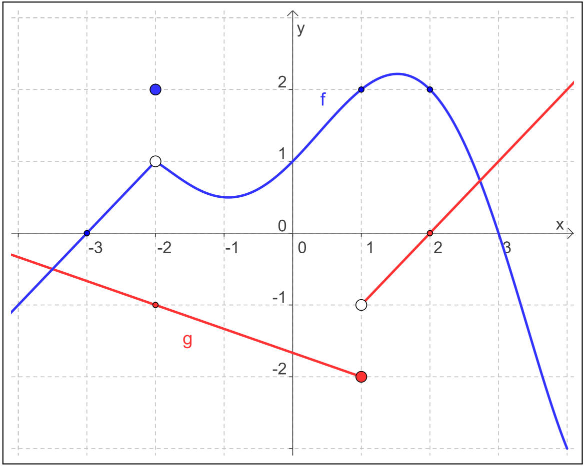


$$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty \text{ pois, quando } x \to +2^-,\ g(x) \to 0^- \text{ e } f(x) \to +2^+.$$



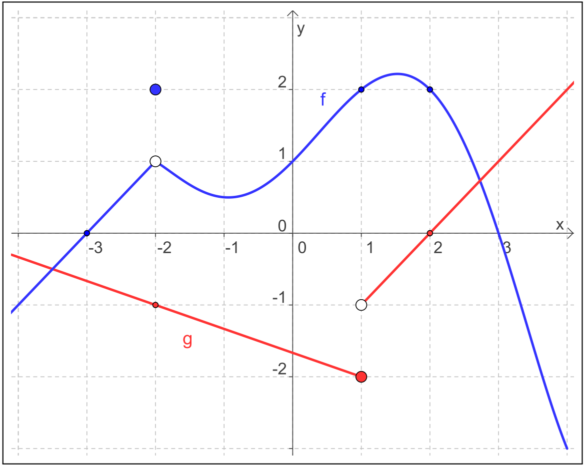
$$\lim_{x\to +2^-}[f(x)/g(x)] = -\infty$$ pois, quando $x \to +2^-$, $g(x) \to 0^-$ e $f(x) \to +2^+$.

Exemplo



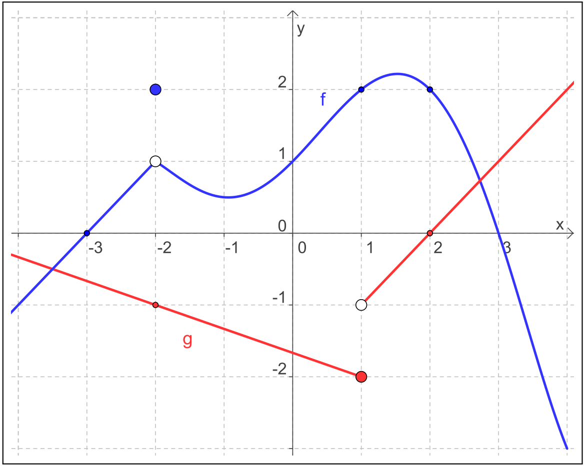
$$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty$$ pois, quando $x \to +2^-$, $g(x) \to 0^-$ e $f(x) \to +2^+$.

Exemplo

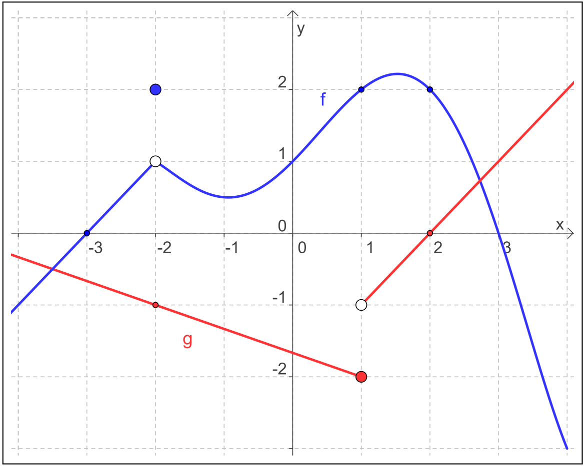


$\lim_{x\to+2}[f(x)/g(x)]$ não existe, não é $+\infty$ e nem é $-\infty$!

Exemplo

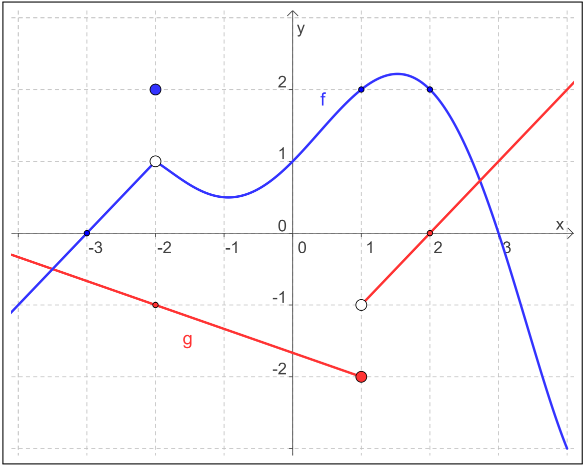


$\lim_{x \to +2} [f(x)/g(x)]$ não existe, não é $+\infty$ e nem é $-\infty$!



$\lim\limits_{x\to+2}[f(x)/g(x)]$ não existe, não é $+\infty$ e nem é $-\infty$!

Exemplo



$\lim_{x \to +2} [f(x)/g(x)]$ não existe, não é $+\infty$ e nem é $-\infty$!