

Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense

Aula 9

28 de abril de 2009

Limites fundamentais

Teorema

Se x é medido em radianos, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Um limite trigonométrico fundamental

GeoGebra - limite-fundamental-01.ggb

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Mover: Arrastar ou selecionar objetos (Esc)

Área(ΔOAP) < Área(Setor OAP) < Área(ΔOAQ)

$\frac{\sin(\theta)}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan(\theta)}{2}$

Moral: $\cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < 1$

Estrutura 1 Estrutura 2 Estrutura 3

Entrada: ° α Comando ...

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sen x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sen x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sen x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{2\theta}$$

$(x = 2\theta)$ $2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2(1) = 2.$

Exemplo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{2\theta}$$

($x = 2\theta$) $2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2(1) = 2.$

Exemplo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{2\theta}$$

($x = 2\theta$) $2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2(1) = 2.$

Exemplo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{2\theta}$$

$(x = 2\theta)$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2(1) = 2.$$

Exemplo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta)}{2\theta}$$

$\stackrel{(x=2\theta)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2(1) = 2.$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin(5x)}{5x} \cdot 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin(3x)}{3x}}{5 \frac{\sin(5x)}{5x}} \\ &= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{x}}{\frac{\sin(5x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin(3x)}{3x}}{5 \frac{\sin(5x)}{5x}} \\ &= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{x}}{\frac{\sin(5x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin(3x)}{3x}}{5 \frac{\sin(5x)}{5x}} \\ &= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{x}}{\frac{\sin(5x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin(3x)}{3x}}{5 \frac{\sin(5x)}{5x}} \\&= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Teorema

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281828459045235\dots$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = 0.367879441171442321\dots$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1.5$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 1 = 1.333\overline{3}$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1 = 2.25$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + 1 = 2.37$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1.00 + 1 \cdot 1.00^1 = 2.00 \\ &\text{ou} \\ &1 \cdot 1.00 + 1 \cdot 1.00 \cdot 1.00 = 2.00 \end{aligned}$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1.00 + 1 \cdot 1.00^1 + 1 \cdot 1.00^2 = 2.19 \\ &\text{ou} \\ &1 \cdot 1.00 + 1 \cdot 1.00 \cdot 1.00 + 1 \cdot 1.00 \cdot 1.00 \cdot 1.00 = 2.19 \end{aligned}$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

1.00 + 0.100.6 = 1.06

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

1.00 + 0.100.4 = 1.04

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = 2.370375.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = 2.370375.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = 2.370375.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

...
...
...
...
...

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

...
...
...
...
...

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.\overline{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.\bar{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\dots$, o valor do dinheiro considerando juros compostos é maior que o valor considerando juros simples.

Motivação: empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\dots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\dots$ reais.

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

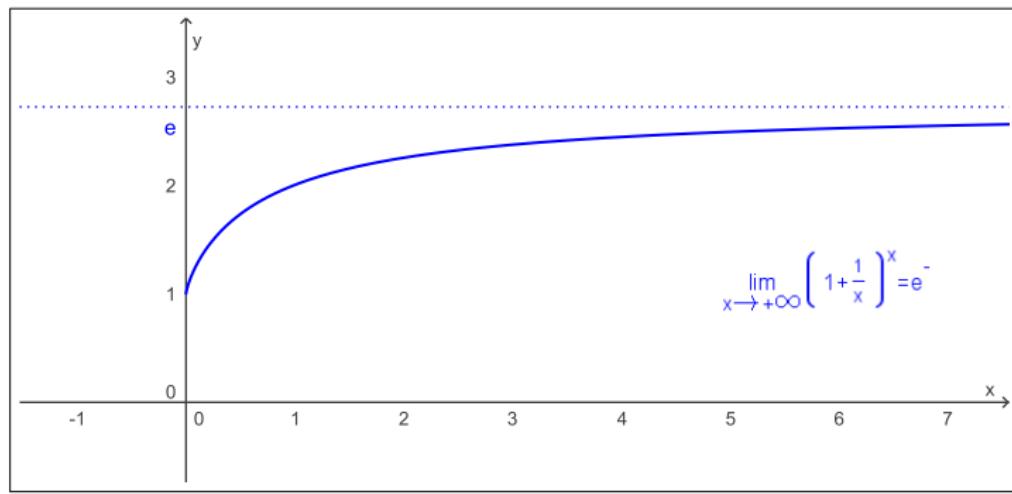
- Moral: como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\dots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\dots$ reais.

Motivação: empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\dots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\dots$ reais.



Exemplo

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u \stackrel{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2$$
$$= e^2.$$

Exemplo

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u \underset{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2$$
$$= e^2.$$

Exemplo

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u \underset{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2$$

= e^2 .

Exemplo

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u \underset{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 \\ = e^2.$$

Exemplo

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (1+u)^{1/u} \stackrel{(x=1/u)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exemplo

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (1 + u)^{1/u} \quad (\textcolor{red}{x = 1/u}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exemplo

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (1 + u)^{1/u} \quad (\textcolor{red}{x = 1/u}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$