Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 9

28 de abril de 2009

Limites fundamentais

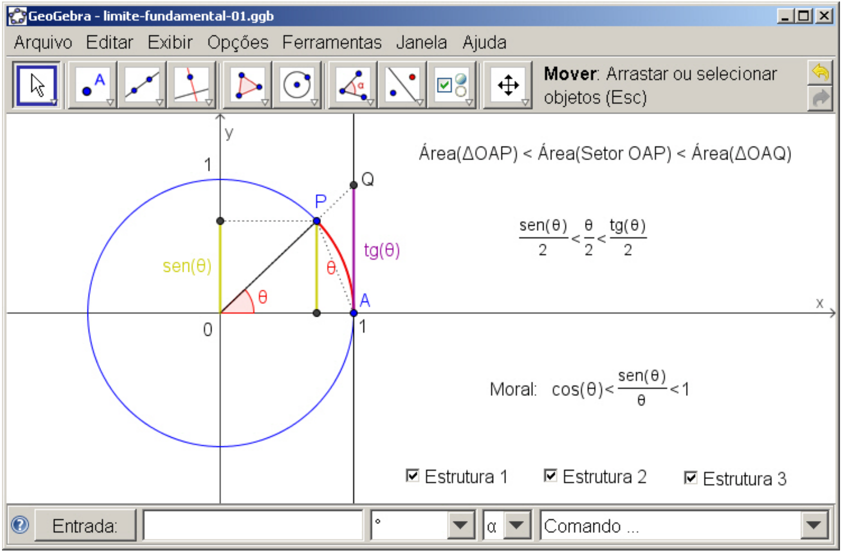
Um limite trigonométrico fundamental

Teorema

Se x é medido em radianos, então

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1.$$

Um limite trigonométrico fundamental



Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right) = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

$$= (1)\cdot\frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

Exemplo

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\,\theta}{2\,\theta}\cdot 2\right) = 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{2\,\theta}$$

$$\stackrel{(x=2\,\theta)}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 2\,(1) = 2.$$

Exemplo

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\,\theta}{2\,\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{2\,\theta}$$

$$\overset{(x = 2\,\theta)}{=} 2 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 2\,(1) = 2.$$

Exemplo

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}(2\,\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,2\,\theta}{2\,\theta}\cdot 2\right) = 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}(2\,\theta)}{2\,\theta}$$

$$\overset{(x=2\,\theta)}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x} = 2\,(1) = 2.$$

Exemplo

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\,\theta}{2\,\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{2\,\theta}$$

$$\overset{(x = 2\,\theta)}{=} 2 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 2\,(1) = 2.$$

Exemplo

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\,\theta}{2\,\theta}\cdot 2\right) = 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{2\,\theta}$$

$$\overset{(x\,=\,2\,\theta)}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 2\,(1) = 2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3\,x)}{\operatorname{sen}(5\,x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\,\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{3\,x}}{5\,\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{5\,x}}$$

$$= \frac{3\,(1)}{5\,(1)} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3\,x)}{\operatorname{sen}(5\,x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\,\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{3\,x}}{5\,\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{5\,x}}$$

$$= \frac{3\,(1)}{5\,(1)} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3\,x)}{\operatorname{sen}(5\,x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\,\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{3\,x}}{5\,\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{5\,x}}$$

$$= \frac{3\,(1)}{5\,(1)} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3\,x)}{\operatorname{sen}(5\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\,\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{3\,x}}{5\,\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{5\,x}}$$

$$= \frac{3\,(1)}{5\,(1)} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1+\cos(x)} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1+\cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\right] = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right] = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right] = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\right] = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right] = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right] \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{1+\cos(x)}\right] = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Outros dois limites fundamentais

Teorema

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281828459045235\ldots$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = 0.367879441171442321\ldots.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\right)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2.\overline{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\right)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2.370$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.\overline{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.\overline{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.\overline{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.\overline{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como $\lim_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\ldots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\ldots$ reais.

Motivação: empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como $\lim_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\ldots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\ldots$ reais.

Motivação: empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

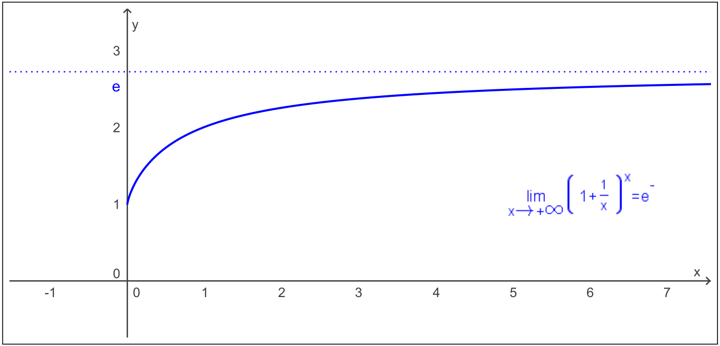
- Moral: como $\lim_{n\to+\infty}(1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\ldots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\ldots$ reais.

Motivação: empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como $\lim_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^n = e = 2.718281828459045235\ldots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\ldots$ reais.



Exemplo

$$\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{2}{u}\right)^{u} \overset{(x=u/2)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}$$

$$= e^{2}.$$

Exemplo

$$\lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^{u} \overset{(x = u/2)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2\,x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}$$

$$= e^{2}.$$

Exemplo

$$\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{2}{u}\right)^{u} \overset{\color{red}{(x=u/2)}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}$$

$$= e^{2}.$$

Exemplo

$$\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{2}{u}\right)^{u} \overset{(x=u/2)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}$$

$$= e^2.$$

Exemplo

$$\lim_{u \to 0^+} (1+u)^{1/u} \overset{(x = 1/u)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exemplo

$$\lim_{u\to 0^+} (1+u)^{1/u} \overset{(x=1/u)}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exemplo

$$\lim_{u \to 0^+} (1+u)^{1/u} \overset{(x = 1/u)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$