Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

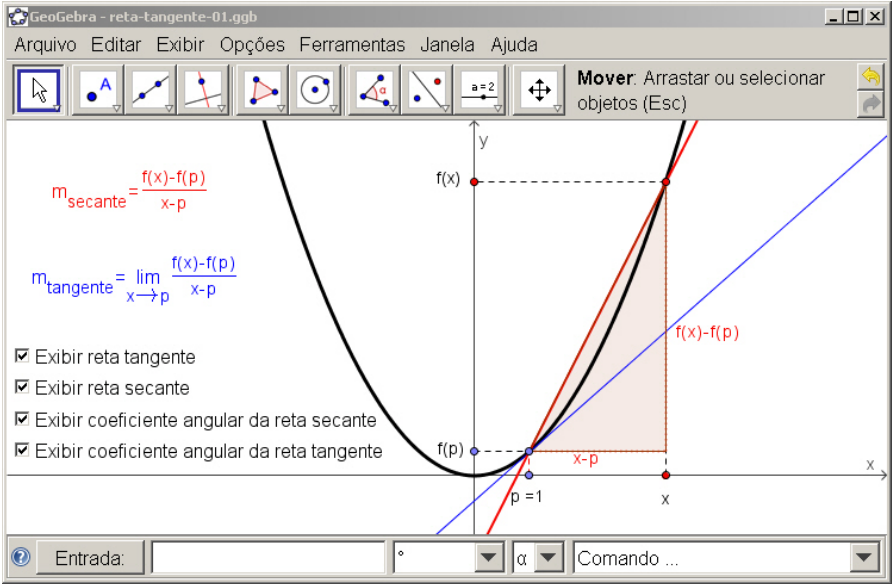
Universidade Federal Fluminense

Aula 11

05 de maio de 2009

Retas Tangentes e Derivadas

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função



Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{x \cdot (x - 3)} \\ &= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)}{x \cdot (x - 3)} \\ &= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)}{x \cdot (x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{x \cdot (x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)}{x \cdot (x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)}{x \cdot (x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{x \cdot (x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{x \cdot (x - 3)} \\
&= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{x \cdot (x - 3)} \\ &= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

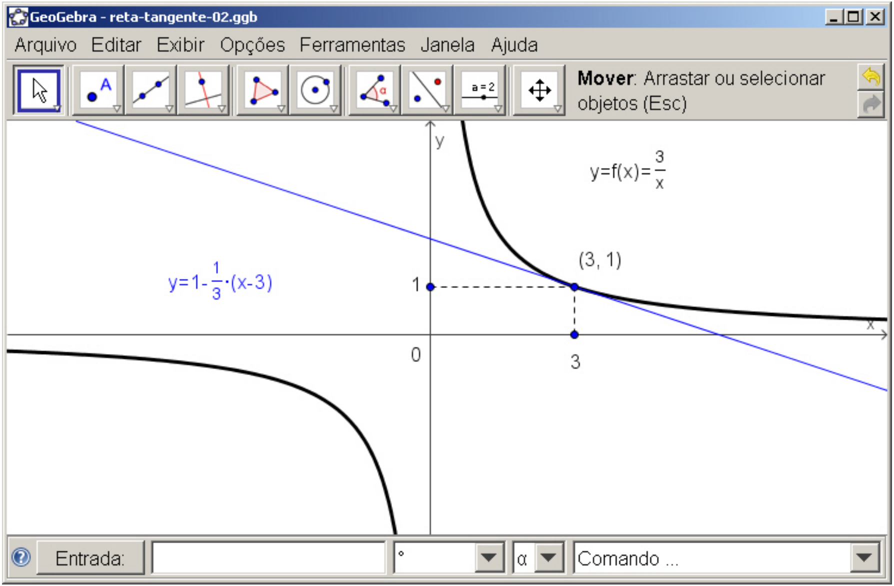
Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{x \cdot (x - 3)} \\ &= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função



Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. A derivada de f no ponto p, denotada por

$$f'(p) \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}(p)$$

é o limite

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

caso ele exista. Neste caso, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) no ponto p.

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$
\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{(x - p) \cdot (x + p)}{x - p} = \lim_{x \to p} (x + p) = 2\,p.
\end{aligned}
$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p}$$

$$= \lim_{x \to p} \frac{(x-p) \cdot (x+p)}{x - p} = \lim_{x \to p} (x + p) = 2\,p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p}$$

$$= \lim_{x \to p} \frac{(x-p)\cdot(x+p)}{x - p} = \lim_{x \to p}(x + p) = 2\,p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p}$$

$$= \lim_{x \to p} \frac{(x - p) \cdot (x + p)}{x - p} = \lim_{x \to p} (x + p) = 2\,p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$
\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{(x - p) \cdot (x + p)}{x - p} = \lim_{x \to p} (x + p) = 2\,p.
\end{aligned}
$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p}$$

$$= \lim_{x\to p} \frac{(x - p)\cdot(x + p)}{x - p} = \lim_{x\to p}(x + p) = 2\,p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p} \\ &= \lim_{x \to p} \frac{(x - p) \cdot (x + p)}{x - p} = \lim_{x \to p} (x + p) = 2\,p. \end{aligned}$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Se $h = x - p$, então $\quad x = p + h \quad$ e

$x \to p \qquad$ se, e somente se, $\qquad h \to 0.$

Logo: $\quad f'(p) = \lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}.$

Se $h = x - p$, então $\quad x = p + h \quad$ e

$x \to p \quad$ se, e somente se, $\quad h \to 0.$

Logo: $\quad f'(p) = \lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}.$

Um outro limite para a derivada

Se $h = x - p$, então $\quad x = p + h \quad$ e

$x \to p \qquad$ se, e somente se, $\qquad h \to 0.$

Logo: $\quad f'(p) = \lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}.$

Um outro limite para a derivada

Se $h = x - p$, então $\quad x = p + h \quad$ e

$x \to p \qquad$ se, e somente se, $\qquad h \to 0.$

Logo: $\quad f'(p) = \lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}.$

Um outro limite para a derivada

Se $h = x - p$, então $\quad x = p + h \quad$ e

$x \to p \qquad$ se, e somente se, $\qquad h \to 0$.

Logo: $\quad f'(p) = \lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}$.

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{p^2 + 2\,p\,h + h^2 - p^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,p + h) = 2\,p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{p^2 + 2\,p\,h + h^2 - p^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,p + h) = 2\,p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{p^2 + 2\,p\,h + h^2 - p^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,p + h) = 2\,p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$
\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{p^2 + 2\,p\,h + h^2 - p^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,p + h) = 2\,p.
\end{aligned}
$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$
\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{p^2 + 2\,p\,h + h^2 - p^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,p + h) = 2\,p.
\end{aligned}
$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$
\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{p^2 + 2\,p\,h + h^2 - p^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,p + h) = 2\,p.
\end{aligned}
$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Exemplo

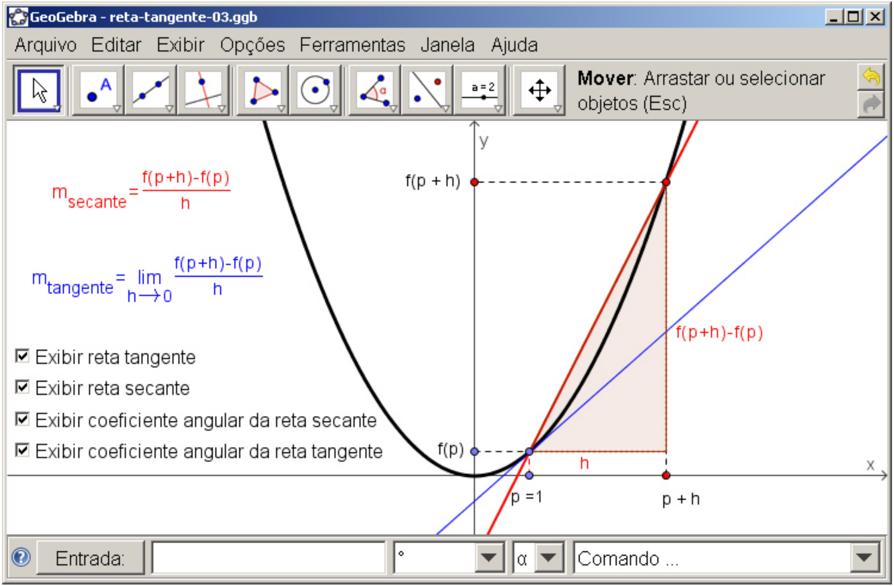
Se $f(x) = x^2$, então

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{p^2 + 2\,p\,h + h^2 - p^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2\,p + h) = 2\,p. \end{aligned}$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função



Nem toda função é derivável! A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$ pois

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ não existe}$$

uma vez que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h}{h} = +1$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Cuidado!

Nem toda função é derivável! A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$ pois

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ não existe}$$

uma vez que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h}{h} = +1$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Cuidado!

Nem toda função é derivável! A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$ pois

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ não existe}$$

uma vez que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h}{h} = +1$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Cuidado!

Nem toda função é derivável! A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$ pois

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ não existe}$$

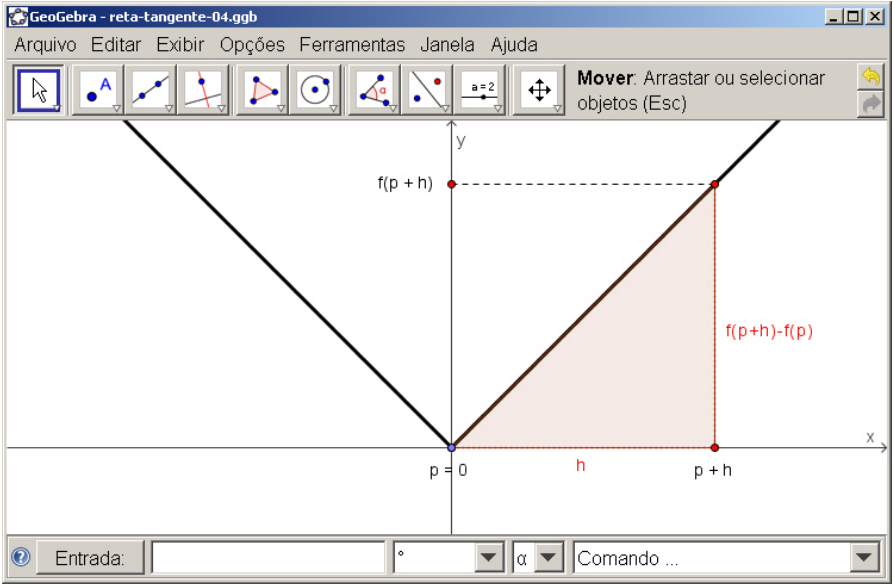
uma vez que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h}{h} = +1$$

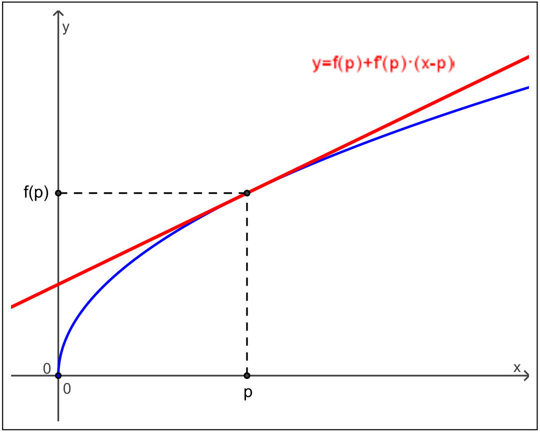
e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$!



Se f é derivável no ponto p, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.



A derivada como taxa de variação instantânea

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
2.0000	34.00000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 17 \text{ m/s}$$

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
2.0000	34.00000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 17 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
2.0000	34.00000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 17 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
2.0000	34.00000000

velocidade média $= \dfrac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 17$ m/s

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
2.0000	34.00000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 17 \text{ m/s}$$

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
2.0000	34.00000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 17 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.1000	18.25000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.1) - s(1)}{1.1 - 1} = 12.5 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.0100	17.25000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.01) - s(1)}{1.01 - 1} = 12.05 \text{ m/s}$$

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.0010	17.01200500

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.001) - s(1)}{1.001 - 1} = 12.005 \text{ m/s}$$

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.0001	17.00120005

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.0001) - s(1)}{1.0001 - 1} = 12.0005 \text{ m/s}$$

$$
\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t \to 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2 - 17}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{5 \cdot t^2 + 2 \cdot t - 7}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{(5 \cdot t + 7) \cdot (t - 1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} (5 \cdot t + 7) = 12 \text{ m/s} \\
&= s'(1).
\end{aligned}
$$

A derivada como taxa de variação instantânea

$$
\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t\to 1} \frac{s(t)-s(1)}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{10+2\cdot t+5\cdot t^2-17}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5\cdot t^2+2\cdot t-7}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{(5\cdot t+7)\cdot(t-1)}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1}(5\cdot t+7) \;=\; 12 \text{ m/s} \\
&= s'(1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t\to 1}\frac{s(t)-s(1)}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{10+2\cdot t+5\cdot t^2-17}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{5\cdot t^2+2\cdot t-7}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{(5\cdot t+7)\cdot(t-1)}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}(5\cdot t+7) = 12 \text{ m/s}\\
&= s'(1).
\end{aligned}
$$

A derivada como taxa de variação instantânea

$$
\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t \to 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2 - 17}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{5 \cdot t^2 + 2 \cdot t - 7}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{(5 \cdot t + 7) \cdot (t - 1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} (5 \cdot t + 7) = 12 \text{ m/s} \\
&= s'(1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t\to 1} \frac{s(t)-s(1)}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{10+2\cdot t+5\cdot t^2-17}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5\cdot t^2+2\cdot t-7}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{(5\cdot t+7)\cdot(t-1)}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} (5\cdot t+7) = 12 \text{ m/s} \\
&= s'(1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t\to 1}\frac{s(t)-s(1)}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{10+2\cdot t+5\cdot t^2-17}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{5\cdot t^2+2\cdot t-7}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{(5\cdot t+7)\cdot(t-1)}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}(5\cdot t+7) \;=\; 12\text{ m/s}\\
&= s'(1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t \to 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2 - 17}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{5 \cdot t^2 + 2 \cdot t - 7}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{(5 \cdot t + 7) \cdot (t - 1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} (5 \cdot t + 7) \quad = \quad 12 \text{ m/s} \\
&= s'(1).
\end{aligned}
$$

Derivadas laterais

Diferenciabilidade em intervalos

Definição

(1) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à direita

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(3) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à esquerda

$$f'_{-}(b) = \lim_{x \to b^{-}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Diferenciabilidade em intervalos

Definição

(1) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à direita

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(3) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à esquerda

$$f'_{-}(b) = \lim_{x \to b^{-}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Definição

(1) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à direita

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(3) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à esquerda

$$f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Definição

(4) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $[a, b]$ se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existem as derivadas laterais

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad f'_{-}(b) = \lim_{x \to b^{-}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_+(0)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_{+}(0)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_+(0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.\end{aligned}$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_+(0)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_{+}(0)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_+(0)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_+(0)$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

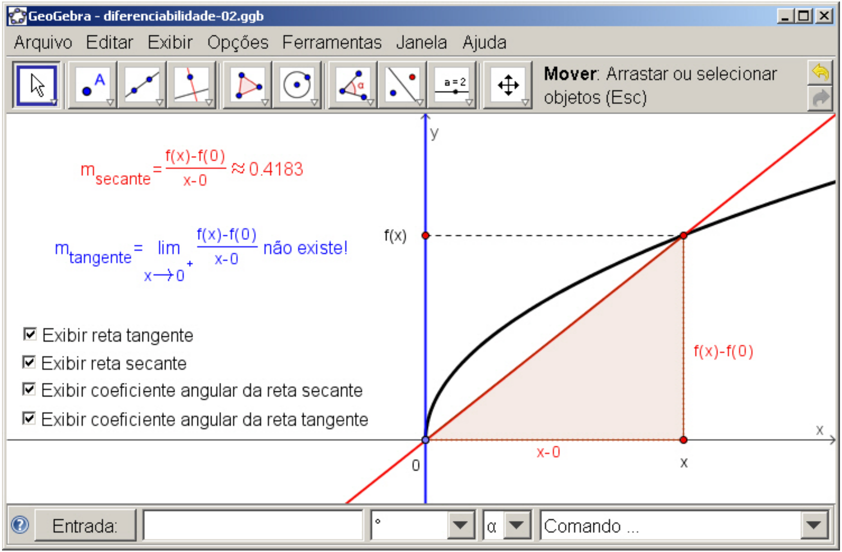
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_+(0)$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.
\end{aligned}
$$

$y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$



Derivadas de Funções Definidas por Partes

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ existem e são iguais:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

A função $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ existem e são iguais:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1.$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$\text{é derivável (diferenciável) em } p = 1?$$

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_{-}(1)$ e $f'_{+}(1)$ existem e são iguais:

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1) - 2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1.$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$\text{é derivável (diferenciável) em } p = 1?$$

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_{-}(1)$ e $f'_{+}(1)$ existem e são iguais:

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1.$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_{-}(1)$ e $f'_{+}(1)$ existem e são iguais:

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^{-}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{-}} \frac{(x+1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{-}} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ existem e são iguais:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ existem e são iguais:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_{-}(1)$ e $f'_{+}(1)$ existem e são iguais:

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_{-}(1)$ e $f'_{+}(1)$ existem e são iguais:

$$\begin{aligned} f'_{-}(1) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1, \\ f'_{+}(1) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1. \end{aligned}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_{-}(1)$ e $f'_{+}(1)$ existem e são iguais:

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ existem e são iguais:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1, \\ f'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1. \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ existem e são iguais:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1, \\ f'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1. \end{aligned}$$

Exemplo