Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 12

7 de maio de 2009

Na Última Aula

Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. A derivada de f no ponto p, denotada por

$$f'(p) \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}(p)$$

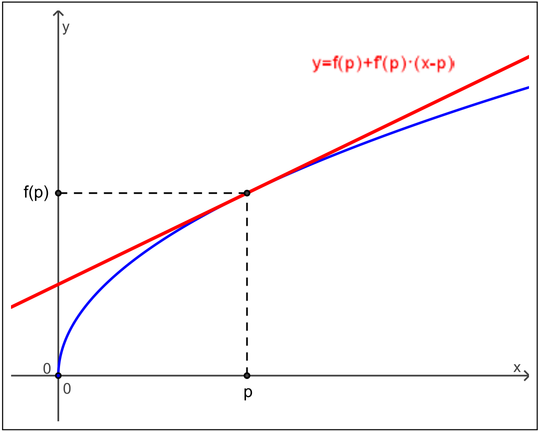
é o limite

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h},$$

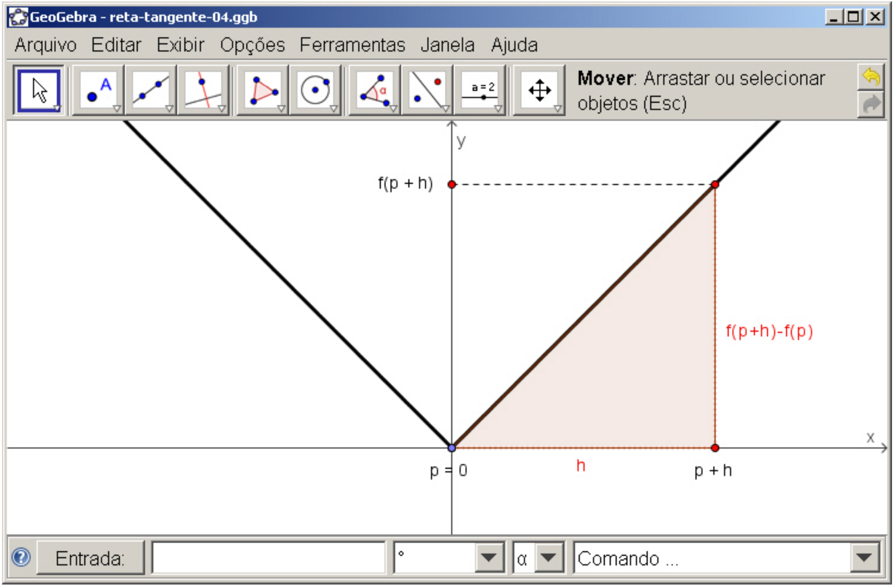
caso ele exista. Neste caso, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) no ponto p.

A equação da reta tangente

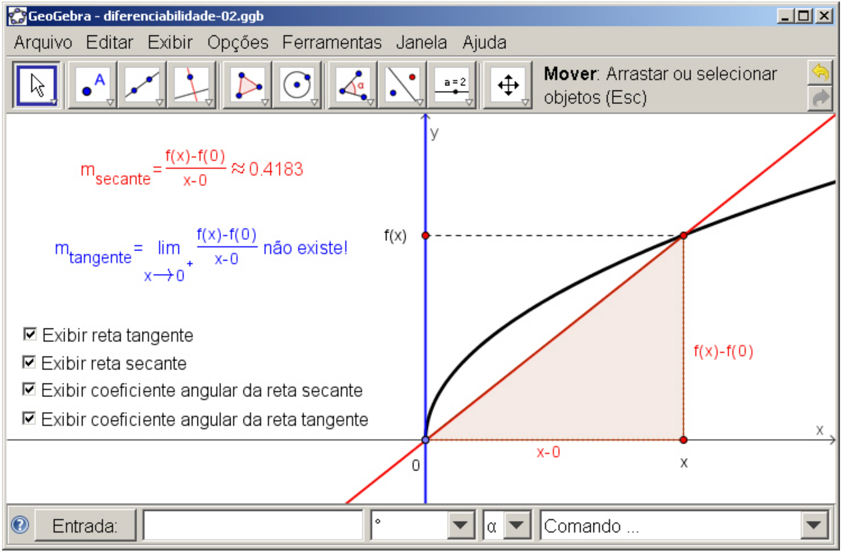
Se f é derivável no ponto p, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.



A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$!



$y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$



Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 = f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\ &= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\ &= f(p) + f'(p) \cdot 0 \;=\; f(p). \end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 = f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 = f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 = f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 = f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p} f(x) &= \lim_{x\to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x\to p} \left[f(p) + \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \cdot (x-p) \right] \\
&= f(p) + f'(p)\cdot 0 = f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 = f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 \;=\; f(p).
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

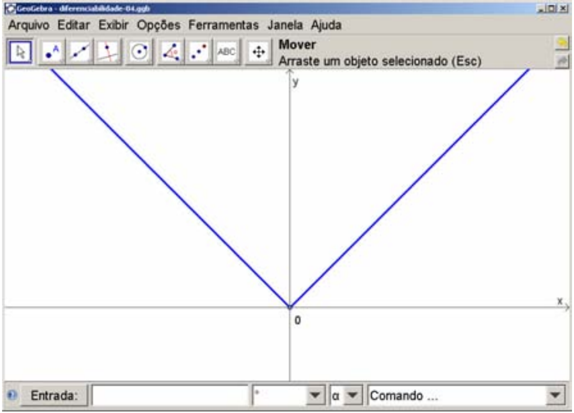
Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 \; = \; f(p).
\end{aligned}$$

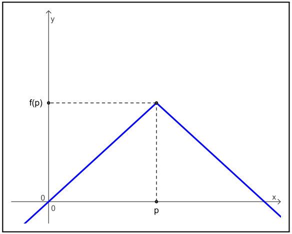
Logo f é contínua em p.

A recíproca do teorema é falsa!

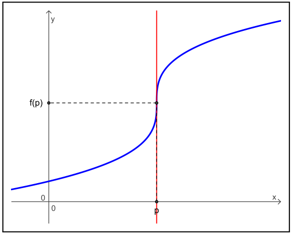
$y = f(x) = |x|$ é contínua em $p = 0$, mas $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.



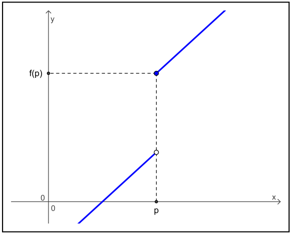
Quando uma função pode deixar de ser derivável?



(bico)



(tangente vertical)



(descontinuidade)

Diferenciação das funções básicas

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[c\cdot f(x)\right] = c\cdot\frac{df}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x)}{[g(x)]^2}.$$

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x), \qquad [f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),$$

$$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x), \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}\left[(-1)\,x\right] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}\left[(-1)\,x\right] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplos

(a) $$\frac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$$

(b) $$\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}\left[(-1)\,x\right] = (-1)\,\frac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$$

Exemplos

(a) $$\frac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$$

(b) $$\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}\left[(-1)\,x\right] = (-1)\,\frac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}\left[(-1)\,x\right] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$\|$$

$$8\,x^7 + 12\,(5\,x^4) - 4\,(4\,x^3) + 10\,(3\,x^2) - 6\,(1) + 0$$

$$\|$$

$$8\,x^7 + 60\,x^4 - 16\,x^3 + 30\,x^2 - 6.$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}\left(x\right) + \frac{d}{dx}\left(5\right)$$

$$\|$$

$$8\,x^7 + 12\,(5\,x^4) - 4\,(4\,x^3) + 10\,(3\,x^2) - 6\,(1) + 0$$

$$\|$$

$$8\,x^7 + 60\,x^4 - 16\,x^3 + 30\,x^2 - 6.$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}\left(x\right) + \frac{d}{dx}\left(5\right)$$

$$\shortparallel$$

$$8\,x^7 + 12\,(5\,x^4) - 4\,(4\,x^3) + 10\,(3\,x^2) - 6\,(1) + 0$$

$$\shortparallel$$

$$8\,x^7 + 60\,x^4 - 16\,x^3 + 30\,x^2 - 6.$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$\parallel$$

$$8\,x^7 + 12\,(5\,x^4) - 4\,(4\,x^3) + 10\,(3\,x^2) - 6\,(1) + 0$$

$$\parallel$$

$$8\,x^7 + 60\,x^4 - 16\,x^3 + 30\,x^2 - 6.$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x))$$

$$\|$$

$$1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$\|$$

$$\operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x).$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \text{sen}(x))$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \text{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\text{sen}(x))$$

$$\|$$

$$1 \cdot \text{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$\|$$

$$\text{sen}(x) + x \cdot \cos(x).$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\Vert$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\Vert$$

$$1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$\Vert$$

$$\operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x).$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \text{sen}(x)\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \text{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\text{sen}(x)\right)$$

$$\shortparallel$$

$$1 \cdot \text{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$\shortparallel$$

$$\text{sen}(x) + x \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11$.

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11$.

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11$.

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11$.

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{d}{dx}\,[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\
&= g(x) + x\,g'(x).
\end{aligned}
$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11$.

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x\,g(x)\right] = \frac{d}{dx}(x)\; g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11.$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\; g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11.$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11.$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11$.

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\frac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\frac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}
$$

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\frac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\frac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\frac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\, x^{\pi - 1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplos

(a) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(b) $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\, x^{\pi - 1}$.

Exemplos

(a) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(b) $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplos

(a) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(b) $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\, x^{\pi - 1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\, x^{\pi-1}.$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \text{tg}(x)\text{, calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\dfrac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\dfrac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \text{tg}(x), \text{ calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \text{tg}(x), \text{ calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \text{tg}(x), \text{ calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\dfrac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\dfrac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \mathrm{tg}(x), \text{ calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\mathrm{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\cos(x) - \mathrm{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \mathrm{sen}(x)(-\mathrm{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \text{tg}(x), \text{ calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \text{tg}(x), \text{ calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\dfrac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\dfrac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}$$

Abusos de notação

Notações corretas

Seja $y = f(x)$ uma função derivável.

Notações corretas para a derivada de f no ponto x:

$$f'(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{df}{dx}(x).$$

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\dfrac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\frac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).

- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\dfrac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).

- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).

- $\dfrac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\dfrac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\dfrac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\dfrac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\dfrac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções diferenciáveis.

Notações correta para a regra do produto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

e

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Abusos de notação para a regra do produto:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

e

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções diferenciáveis.

Notações correta para a regra do produto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

e

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Abusos de notação para a regra do produto:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

e

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Abusos de notação

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções diferenciáveis.

Notações correta para a regra do produto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

e

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Abusos de notação para a regra do produto:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

e

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Demonstrações

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1} \right) \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right) \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right)\\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1} \right) \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1} \right) \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1} \right) \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right) \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1} \right) \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1} \right) \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right) \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} \;=\; n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h}+\frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\text{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\text{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h}\right)\\
&= \text{sen}(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 \;=\; \cos(x).
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \;=\; \cos(x).
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \cdot \text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\text{sen}(x) \cdot \cos(h) - \text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x) \cdot \text{sen}(h)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\text{sen}(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\text{sen}(h)}{h} \right] \\
&= \left(\lim_{h \to 0} \text{sen}(x) \right) \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \left(\lim_{h \to 0} \cos(x) \right) \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \right) \\
&= \text{sen}(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \; = \; \cos(x).
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \;=\; \cos(x).
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)-\operatorname{sen}(x)}{h}+\frac{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 = \cos(x).
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\text{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\text{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \text{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \ = \ \cos(x).
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x).
\end{aligned}
$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h}+\frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\text{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\text{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h}\right)\\
&= \text{sen}(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 = \cos(x).
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)-\operatorname{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \;=\; \cos(x).
\end{aligned}
$$