Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 13

12 de maio de 2009

Na Última Aula

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$
$\operatorname{tg}(x)$	$\sec^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\operatorname{cossec}^2(x)$
$\operatorname{cossec}(x)$	$-\operatorname{cossec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x),$$

$$\frac{d}{dx}[c\cdot f(x)] = c\cdot\frac{df}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x)}{[g(x)]^2}.$$

A regra da cadeia

A regra da cadeia

Teorema

A regra da cadeia nos ensina como derivar a composição de duas funções diferenciáveis: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são duas funções diferenciáveis, então $y = (f \circ g)(x)$ é diferenciável e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, com a outra notação,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Usando abuso de notação, a regra da cadeia fica assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

A regra da cadeia

Teorema

A regra da cadeia nos ensina como derivar a composição de duas funções diferenciáveis: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são duas funções diferenciáveis, então $y = (f \circ g)(x)$ é diferenciável e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, com a outra notação,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Usando abuso de notação, a regra da cadeia fica assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

A regra da cadeia

Teorema

A regra da cadeia nos ensina como derivar a composição de duas funções diferenciáveis: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são duas funções diferenciáveis, então $y = (f \circ g)(x)$ é diferenciável e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, com a outra notação,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Usando abuso de notação, a regra da cadeia fica assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

A regra da cadeia

Teorema

A regra da cadeia nos ensina como derivar a composição de duas funções diferenciáveis: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são duas funções diferenciáveis, então $y = (f \circ g)(x)$ é diferenciável e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, com a outra notação,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Usando abuso de notação, a regra da cadeia fica assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Teorema

A regra da cadeia nos ensina como derivar a composição de duas funções diferenciáveis: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são duas funções diferenciáveis, então $y = (f \circ g)(x)$ é diferenciável e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, com a outra notação,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Usando abuso de notação, a regra da cadeia fica assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 3x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x \quad \text{e} \quad y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 3\,x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3\,x^2 + 1) = \frac{3\,x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 3x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3\,x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3\,x^2 + 1) = \frac{3\,x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3\,x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3\,x^2 + 1) = \frac{3\,x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3\,x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3\,x^2 + 1) = \frac{3\,x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x \quad$ e $\quad y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3\,x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, conseqüentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3\,x^2 + 1) = \frac{3\,x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{f}_{\text{função de fora}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}}\right] = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de dentro}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\operatorname{sen}}_{\text{função de fora}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}}\right] = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de dentro}}}$$

A regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{f}_{\text{função de fora}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\right] = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de dentro}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\operatorname{sen}}_{\text{função de fora}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\right] = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(2\,x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de dentro}}}$$

A regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{f}_{\text{função de fora}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\Big] = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de dentro}}}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{\text{sen}}_{\text{função de fora}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\Big] = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(2\,x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de dentro}}}$$

A regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{f}_{\text{função de fora}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\right] = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de dentro}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\text{sen}}_{\text{função de fora}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\right] = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\ \text{função de dentro}}}\cdot\underbrace{(2\,x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\ \text{de dentro}}}$$

A regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\Bigg[\underbrace{f}_{\text{função de fora}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}}\Bigg] = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de dentro}}}$$

$$\frac{d}{dx}\Bigg[\underbrace{\operatorname{sen}}_{\text{função de fora}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}}\Bigg] = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada na}\\\text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(2\,x)}_{\substack{\text{derivada da função}\\\text{de dentro}}}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1)\,e^x - (x^3 + x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1) - (x^3 + x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \text{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)e^x - (x^3+x)e^x}{(e^x)^2} \\ &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\ &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}. \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \text{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1)\,e^x - (x^3 + x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1) - (x^3 + x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1)\,e^x - (x^3 + x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1) - (x^3 + x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)-(x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \text{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1)\,e^x - (x^3 + x)\,e^x}{(e^x)^2} \\ &= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2 + 1) - (x^3 + x)}{e^x} \\ &= \cos\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}. \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\
&= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3 + x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\ &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\ &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= x^c & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= c \cdot x^{c-1} \\
y &= \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= +\cos(x) \\
y &= \cos(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}(x) \\
y &= e^x & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= e^x \\
y &= \ln(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Regras básicas de derivação

$$
\begin{aligned}
y &= x^c & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= c \cdot x^{c-1} \\
y &= \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= +\cos(x) \\
y &= \cos(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}(x) \\
y &= e^x & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= e^x \\
y &= \ln(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Regras básicas de derivação

$$y = x^c \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = c \cdot x^{c-1}$$

$$y = \operatorname{sen}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = +\cos(x)$$

$$y = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(x)$$

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Regras básicas de derivação

$$
\begin{array}{rclcccl}
y & = & x^c & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & c \cdot x^{c-1} \\[2ex]
y & = & \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & +\cos(x) \\[2ex]
y & = & \cos(x) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & -\operatorname{sen}(x) \\[2ex]
y & = & e^x & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & e^x \\[2ex]
y & = & \ln(x) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{1}{x}
\end{array}
$$

Regras básicas de derivação

$$
\begin{aligned}
y &= x^c & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= c \cdot x^{c-1} \\
y &= \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= +\cos(x) \\
y &= \cos(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}(x) \\
y &= e^x & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= e^x \\
y &= \ln(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Regras básicas de derivação

$$y = x^c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c \cdot x^{c-1}$$

$$y = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = +\cos(x)$$

$$y = \cos(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(x)$$

$$y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = \ln(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

$$
\begin{aligned}
y &= u^c & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= c \cdot u^{c-1} \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= \operatorname{sen}(u) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= +\cos(u) \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= \cos(u) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= e^u & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= e^u \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= \ln(u) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

$$
\begin{array}{rcl}
y = u^c & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} = c \cdot u^{c-1} \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y = \operatorname{sen}(u) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} = +\cos(u) \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y = \cos(u) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(u) \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y = e^u & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} = e^u \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y = \ln(u) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}
\end{array}
$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

$$y = u^c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c \cdot u^{c-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \operatorname{sen}(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = +\cos(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \cos(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \ln(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

$$y = u^c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c \cdot u^{c-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \operatorname{sen}(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = +\cos(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \cos(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \ln(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

$$
\begin{array}{rclcrcl}
y & = & u^c & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & c \cdot u^{c-1} \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y & = & \operatorname{sen}(u) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & +\cos(u) \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y & = & \cos(u) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & -\operatorname{sen}(u) \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y & = & e^u & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & e^u \cdot \dfrac{du}{dx} \\[2ex]
y & = & \ln(u) & \Rightarrow & \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}
\end{array}
$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

$$
\begin{aligned}
y &= u^c & \Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} &= c \cdot u^{c-1} \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= \operatorname{sen}(u) & \Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} &= +\cos(u) \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= \cos(u) & \Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= e^u & \Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} &= e^u \cdot \frac{du}{dx} \\
y &= \ln(u) & \Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}$.

Solução. Temos que

$$y = e^u, \qquad \text{onde } u = \operatorname{sen}(x).$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{\operatorname{sen}(x)} \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = e^{\text{sen}(x)}$.

Solução. Temos que

$$y = e^u, \qquad \text{onde } u = \text{sen}(x).$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{\text{sen}(x)} \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = e^{\text{sen}(x)}$.

Solução. Temos que

$$y = e^{u}, \qquad \text{onde } u = \text{sen}(x).$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot \frac{du}{dx} = e^{\text{sen}(x)} \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = e^{\text{sen}(x)}$.

Solução. Temos que

$$y = e^{u}, \qquad \text{onde } u = \text{sen}(x).$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot \frac{du}{dx} = e^{\text{sen}(x)} \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = e^{\text{sen}(x)}$.

Solução. Temos que

$$y = e^{u}, \qquad \text{onde } u = \text{sen}(x).$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot \frac{du}{dx} = e^{\text{sen}(x)} \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = e^{\text{sen}(x)}$.

Solução. Temos que

$$y = e^{u}, \qquad \text{onde } u = \text{sen}(x).$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot \frac{du}{dx} = e^{\text{sen}(x)} \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = \left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9\,u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2x+1)^2} = \frac{45\,(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = \left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2x+1)^2} = \frac{45(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = \left(\dfrac{x-2}{2\,x+1}\right)^9$.

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2\,x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9\,u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2\,x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2\,x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2\,x+1)^2} = \frac{45\,(x-2)^8}{(2\,x+1)^{10}}.$$

Exemplo

$$\text{Calcule a derivada da função } y = f(x) = \left(\frac{x-2}{2\,x+1}\right)^9.$$

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2\,x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9\,u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2\,x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2\,x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2\,x+1)^2} = \frac{45\,(x-2)^8}{(2\,x+1)^{10}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = \left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9\,u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2x+1)^2} = \frac{45\,(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9\,u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2x+1)^2} = \frac{45\,(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = \left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9\,u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2x+1)^2} = \frac{45\,(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}.$$

A regra da cadeia para uma composição de 3 funções

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ou, usando a notação de Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ g \circ h)}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{d(g \circ h)}{dx}(x) \\ &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(h(x)) \cdot \frac{dh}{dx}(x). \end{aligned}$$

A regra da cadeia para uma composição de 3 funções

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ou, usando a notação de Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ g \circ h)}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{d(g \circ h)}{dx}(x) \\ &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(h(x)) \cdot \frac{dh}{dx}(x). \end{aligned}$$

A regra da cadeia para uma composição de 3 funções

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ou, usando a notação de Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ g \circ h)}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{d(g \circ h)}{dx}(x) \\ &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(h(x)) \cdot \frac{dh}{dx}(x). \end{aligned}$$

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ou, usando a notação de Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ g \circ h)}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{d(g \circ h)}{dx}(x) \\ &= \frac{df}{dx}((g \circ h)(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(h(x)) \cdot \frac{dh}{dx}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg}(x)))$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\operatorname{tg}(x))] \\ &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot [-\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x))] \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] \\ &= -\cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x)) \cdot \sec^2(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg}(x)))$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\operatorname{tg}(x))] \\ &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot [-\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x))] \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] \\ &= -\cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x)) \cdot \sec^2(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg}(x)))$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\operatorname{tg}(x))] \\ &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot [-\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x))] \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] \\ &= -\cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x)) \cdot \sec^2(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = \text{sen}(\cos(\text{tg}(x)))$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos(\text{tg}(x))) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\text{tg}(x))] \\ &= \cos(\cos(\text{tg}(x))) \cdot [-\text{sen}(\text{tg}(x))] \cdot \frac{d}{dx}[\text{tg}(x)] \\ &= -\cos(\cos(\text{tg}(x))) \cdot \text{sen}(\text{tg}(x)) \cdot \sec^2(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg}(x)))$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\operatorname{tg}(x))] \\ &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot [-\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x))] \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] \\ &= -\cos(\cos(\operatorname{tg}(x))) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x)) \cdot \sec^2(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = \text{sen}(\cos(\text{tg}(x)))$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos(\text{tg}(x))) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\text{tg}(x))] \\ &= \cos(\cos(\text{tg}(x))) \cdot [-\text{sen}(\text{tg}(x))] \cdot \frac{d}{dx}[\text{tg}(x)] \\ &= -\cos(\cos(\text{tg}(x))) \cdot \text{sen}(\text{tg}(x)) \cdot \sec^2(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.
\end{aligned}
$$

Calcule a derivada da função $y = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}. \end{aligned}$$