Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 14

14 de maio de 2009

Derivadas de ordem superior

Derivadas de ordem superior

Se f é uma função diferenciável, então f' também é uma função, de modo que f' também pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

A nova função f'' é denominada derivada segunda de f, porque ela é a derivada da derivada de f.

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Se f é uma função diferenciável, então f' também é uma função, de modo que f' também pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

A nova função f'' é denominada derivada segunda de f, porque ela é a derivada da derivada de f.

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Derivadas de ordem superior

Se f é uma função diferenciável, então f' também é uma função, de modo que f' também pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

A nova função f'' é denominada derivada segunda de f, porque ela é a derivada da derivada de f.

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Derivadas de ordem superior

Se f é uma função diferenciável, então f' também é uma função, de modo que f' também pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

A nova função f'' é denominada derivada segunda de f, porque ela é a derivada da derivada de f.

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Se $y = f(x) = x\cos(x)$, calcule $f''(x)$.

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)\right) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(x) = x\cos(x)$, calcule $f''(x)$.

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)\right)\\
&= -\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right)\\
&= -\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x).
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)) \\
&= -\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\
&= -\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x).
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\text{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\text{sen}(x)) \\
&= -\text{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\text{sen}(x) + x\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\right) \\
&= -\text{sen}(x) - (\text{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\text{sen}(x) - x\cos(x).
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\,\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\,\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\operatorname{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\operatorname{sen}(x)) \\
&= -\operatorname{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\operatorname{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x))\right) \\
&= -\operatorname{sen}(x) - (\operatorname{sen}(x) + x\,\cos(x)) = -2\,\operatorname{sen}(x) - x\,\cos(x).
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)) \\
&= -\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\
&= -\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x).
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)\right) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)) \\ &= -\,\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\ &= -\,\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x)\text{, calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)) \\ &= -\,\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\ &= -\,\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x\cos(x), \text{ calcule } f''(x).$$

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\,\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)) \\ &= -\,\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\ &= -\,\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

Derivadas de ordem superior em cinemática

Se $s = s(t)$ representa a posição de um objeto que se move em uma linha reta, então sua velocidade é dada por

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t)$$

e sua aceleração é dada por

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t).$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Exemplo

Se $y = f(x) = x^{100}$, calcule $f^{(100)}(x) = \dfrac{d^{100}f}{dx^{100}}(x)$.

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \qquad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \qquad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^0 = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^0 = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Exemplo

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{0} = 100!.$$

Classes de diferenciabilidade

Classes de diferenciabilidade

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função real.

(1) Dizemos que f é de classe C^0 em D se f é contínua em D. Notação: $f \in C^0$.

(2) Dizemos que f é de classe C^1 em D se $f'(x)$ existe para todo $x \in D$ e se f e f' são contínuas em D. Notação: $f \in C^1$.

(3) Dizemos que f é de classe C^k em D se $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(k)}(x)$ existem para todo $x \in D$ e se f, f', $\ldots$, $f^{(k)}$ são contínuas em D. Notação: $f \in C^k$.

(4) Dizemos que f é de classe C^∞ em D se $f^{(i)}(x)$ existe para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in D$ e se $f^{(i)}$ é contínua em D para todo $i \in \mathbb{N}$. Notação: $f \in C^\infty$.

Classes de diferenciabilidade

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função real.

(1) Dizemos que f é de classe C^0 em D se f é contínua em D. Notação: $f \in C^0$.

(2) Dizemos que f é de classe C^1 em D se $f'(x)$ existe para todo $x \in D$ e se f e f' são contínuas em D. Notação: $f \in C^1$.

(3) Dizemos que f é de classe C^k em D se $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ existem para todo $x \in D$ e se $f, f', \ldots, f^{(k)}$ são contínuas em D. Notação: $f \in C^k$.

(4) Dizemos que f é de classe C^∞ em D se $f^{(i)}(x)$ existe para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in D$ e se $f^{(i)}$ é contínua em D para todo $i \in \mathbb{N}$. Notação: $f \in C^\infty$.

Classes de diferenciabilidade

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função real.

(1) Dizemos que f é de classe C^0 em D se f é contínua em D. Notação: $f \in C^0$.

(2) Dizemos que f é de classe C^1 em D se $f'(x)$ existe para todo $x \in D$ e se f e f' são contínuas em D. Notação: $f \in C^1$.

(3) Dizemos que f é de classe C^k em D se $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ existem para todo $x \in D$ e se $f, f', \ldots, f^{(k)}$ são contínuas em D. Notação: $f \in C^k$.

(4) Dizemos que f é de classe C^∞ em D se $f^{(i)}(x)$ existe para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in D$ e se $f^{(i)}$ é contínua em D para todo $i \in \mathbb{N}$. Notação: $f \in C^\infty$.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função real.

(1) Dizemos que f é de classe C^0 em D se f é contínua em D. Notação: $f \in C^0$.

(2) Dizemos que f é de classe C^1 em D se $f'(x)$ existe para todo $x \in D$ e se f e f' são contínuas em D. Notação: $f \in C^1$.

(3) Dizemos que f é de classe C^k em D se $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(k)}(x)$ existem para todo $x \in D$ e se f, f', $\dots$, $f^{(k)}$ são contínuas em D. Notação: $f \in C^k$.

(4) Dizemos que f é de classe C^∞ em D se $f^{(i)}(x)$ existe para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in D$ e se $f^{(i)}$ é contínua em D para todo $i \in \mathbb{N}$. Notação: $f \in C^\infty$.

$f(x) = |x|$ é de classe C^0, mas não é de classe C^1.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$ é de classe C^1, mas não é de classe C^2.

$f(x) = x^{100}$ é de classe C^∞.

$f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1}$ é de classe C^∞.

Quase que todas as funções que estudaremos são de classe C^∞!

Exemplos

$$f(x) = |x| \text{ é de classe } C^0, \text{ mas não é de classe } C^1.$$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1, \text{ mas não é de classe } C^2.$$

$$f(x) = x^{100} \text{ é de classe } C^\infty.$$

$$f(x) = \frac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1} \text{ é de classe } C^\infty.$$

Quase que todas as funções que estudaremos são de classe C^∞!

Exemplos

$$f(x) = |x| \text{ é de classe } C^0\text{, mas não é de classe } C^1.$$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1\text{, mas não é de classe } C^2.$$

$$f(x) = x^{100} \text{ é de classe } C^\infty.$$

$$f(x) = \frac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1} \text{ é de classe } C^\infty.$$

Quase que todas as funções que estudaremos são de classe C^∞!

$$f(x) = |x| \text{ é de classe } C^0\text{, mas não é de classe } C^1.$$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1\text{, mas não é de classe } C^2.$$

$$f(x) = x^{100} \text{ é de classe } C^\infty.$$

$$f(x) = \frac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1} \text{ é de classe } C^\infty.$$

Quase que todas as funções que estudaremos são de classe C^∞!

Exemplos

$$f(x) = |x| \text{ é de classe } C^0\text{, mas não é de classe } C^1.$$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1\text{, mas não é de classe } C^2.$$

$$f(x) = x^{100} \text{ é de classe } C^\infty.$$

$$f(x) = \frac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1} \text{ é de classe } C^\infty.$$

Quase que todas as funções que estudaremos são de classe C^∞!

Derivadas de funções inversas

O teorema da função inversa

Teorema

Seja $f\colon I \mapsto J$ uma função de classe C^1, onde I e J são intervalos abertos. Se $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ para todo $x \in J$, então f é inversível e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad \forall x \in J.$$

Demonstração

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{ (derivando dos dois lados)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{ (usando a regra da cadeia)}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J.$$

Demonstração

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{ (derivando dos dois lados)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{ (usando a regra da cadeia)}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J.$$

Demonstração

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

$\Downarrow$ (derivando dos dois lados)

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

$\Downarrow$ (usando a regra da cadeia)

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$

$\Downarrow$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J.$$

Demonstração

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{(derivando dos dois lados)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{(usando a regra da cadeia)}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J.$$

Demonstração

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{ (derivando dos dois lados)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{ (usando a regra da cadeia)}$$

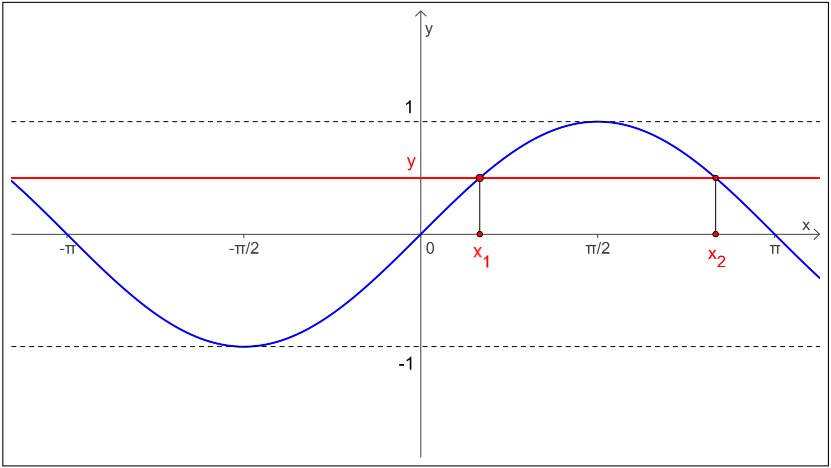
$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J.$$

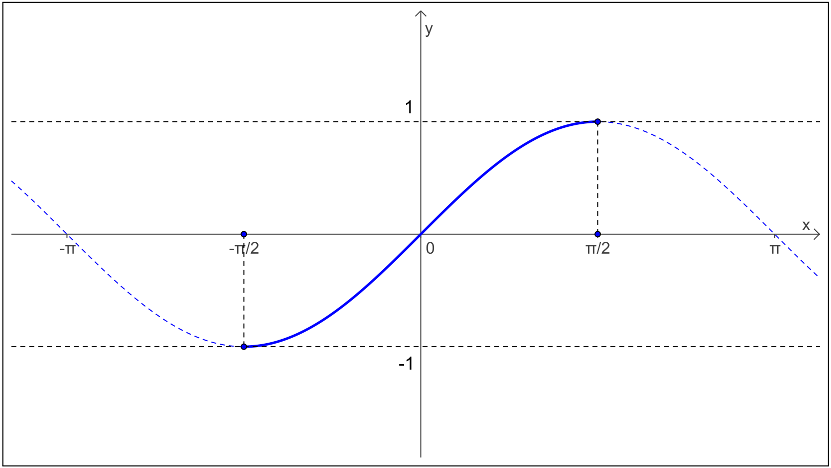
Exemplo

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \mathrm{sen}(x) \end{array}$$ não é inversível, pois não é injetiva.

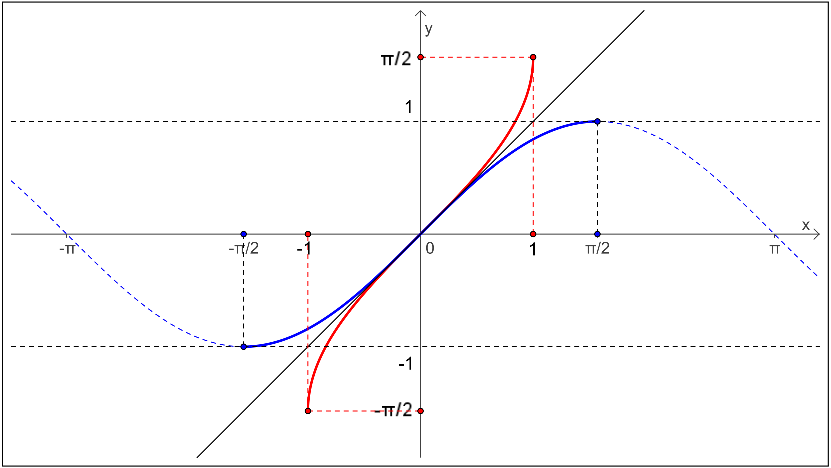


Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f: & [-\pi/2, +\pi/2] & \rightarrow & [-1, +1] \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.

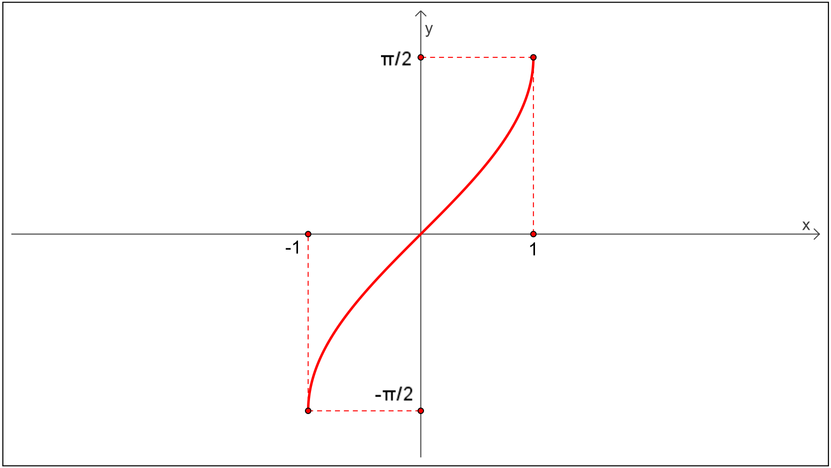


$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [-\pi/2,+\pi/2] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



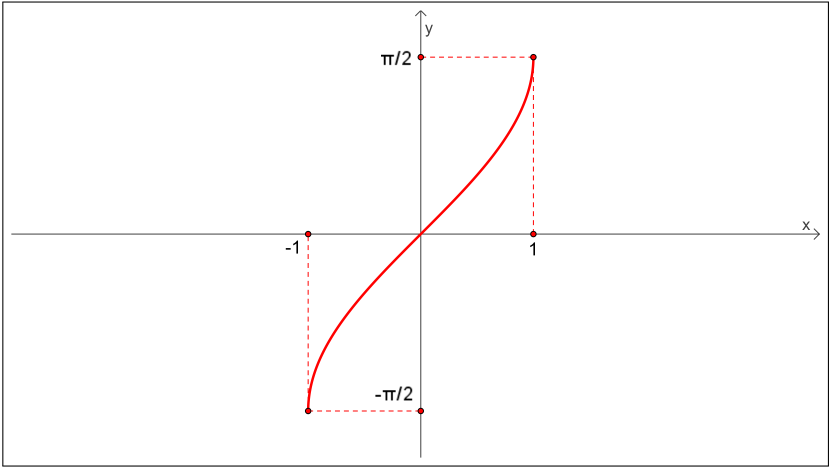
Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [-\pi/2,+\pi/2] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco seno é derivável?

O teorema da função inversa garante que $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$ é derivável no intervalo aberto $(-1, +1)$.



Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \text{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\text{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\text{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \text{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\text{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\text{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \text{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\text{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\text{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1 - x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1 - x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \text{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\text{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\text{arcsen}(x)) > 0$.

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

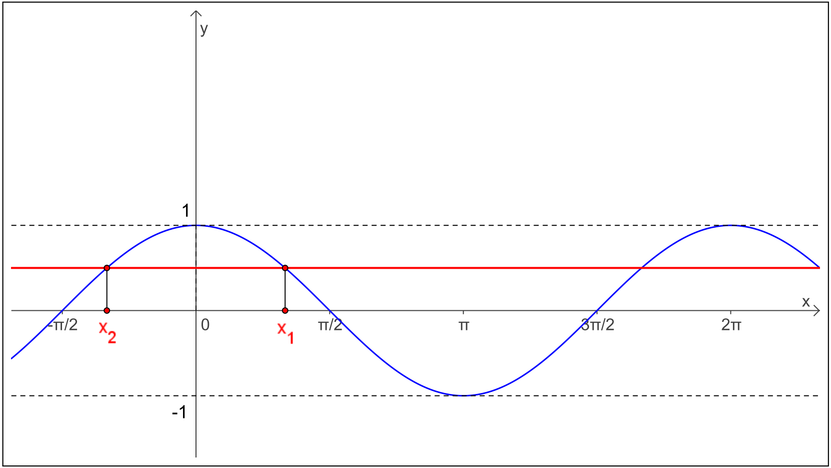
pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Novo item na tabela de derivadas!

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arcsen}(u)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}.$$

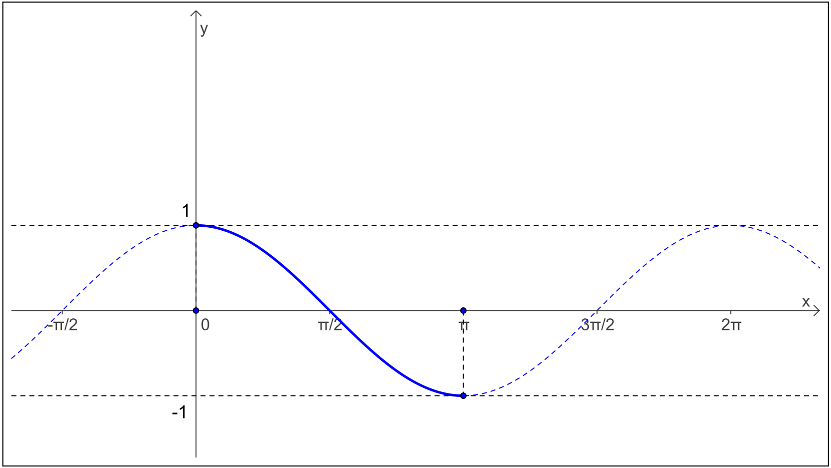
A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$ não é inversível, pois não é injetiva.



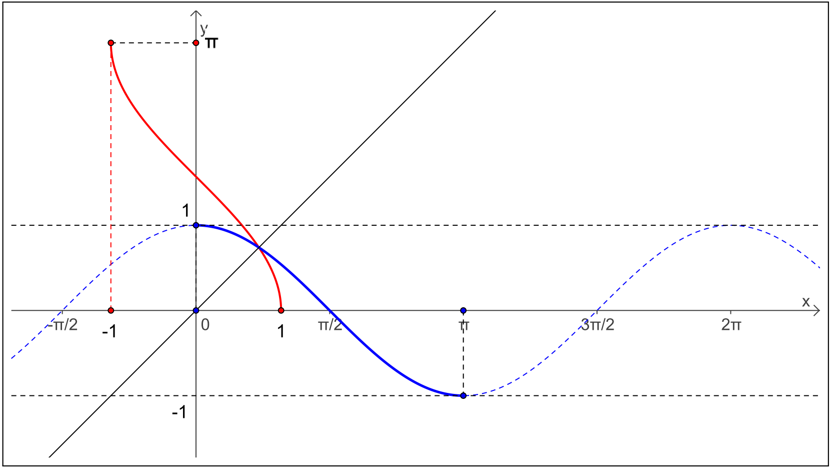
A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,\pi] & \rightarrow & [-1,+1] \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



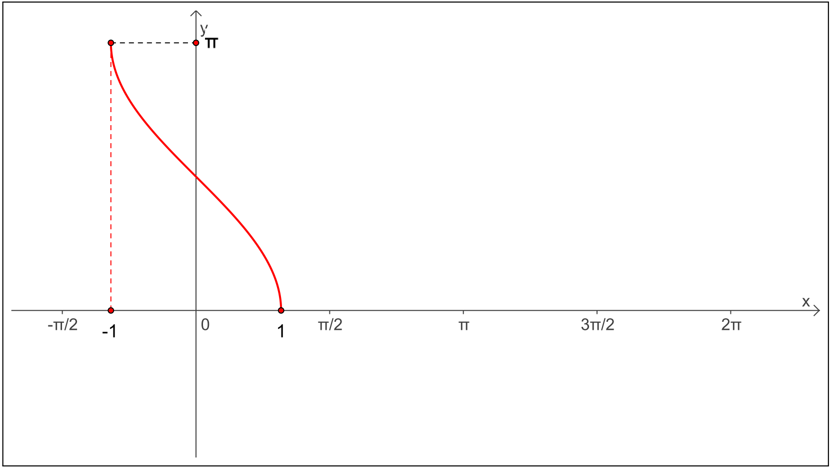
A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arccos}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



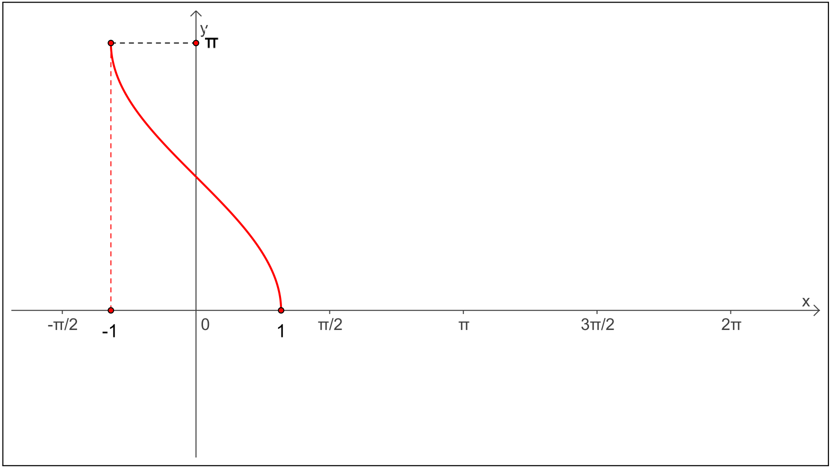
A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arccos}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco cosseno é derivável?

O teorema da função inversa garante que $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ é derivável no intervalo aberto $(-1, +1)$.



Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arccos}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arccos}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arccos}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arccos}(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arccos}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arccos}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arccos}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\operatorname{arccos}(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \text{arccos}(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arccos}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\,\text{sen}(\text{arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\text{arccos}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arccos}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\text{sen}(\text{arccos}(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\text{sen}(\text{arccos}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\text{sen}(\text{arccos}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\,\text{sen}(\text{arccos}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \text{sen}(\text{arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\text{arccos}(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\text{sen}(\text{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad & \Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
& \Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
& \Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
& \Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
& \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\arcsen(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad & \Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
& \Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
& \Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
& \Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
& \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\arcsen(x)) > 0$.

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

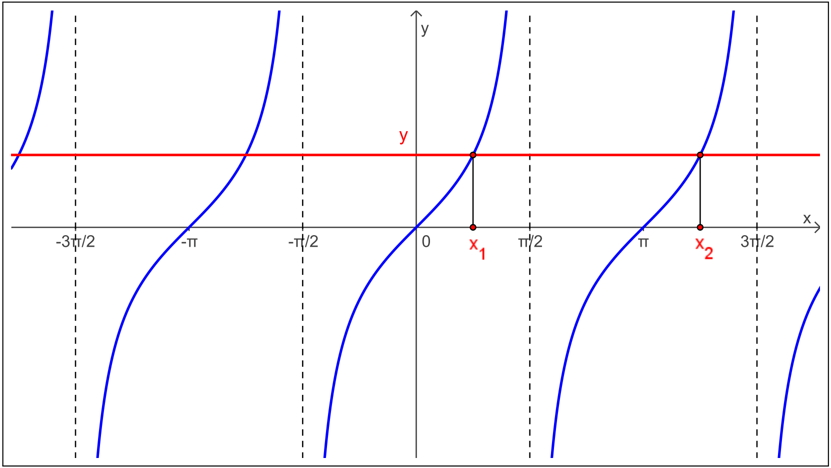
pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Novo item na tabela de derivadas!

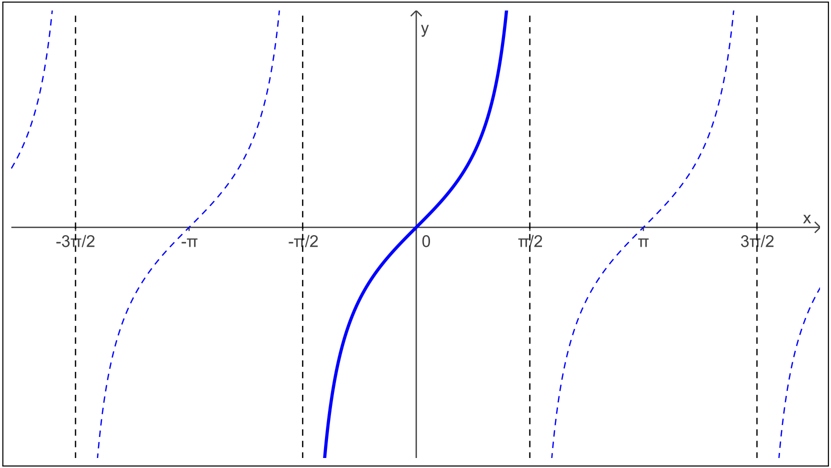
$$\frac{d}{dx}\,[\arccos(u)] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}.$$

A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} - \{\pi/2 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{tg}(x) \end{array}$$ não é inversível.

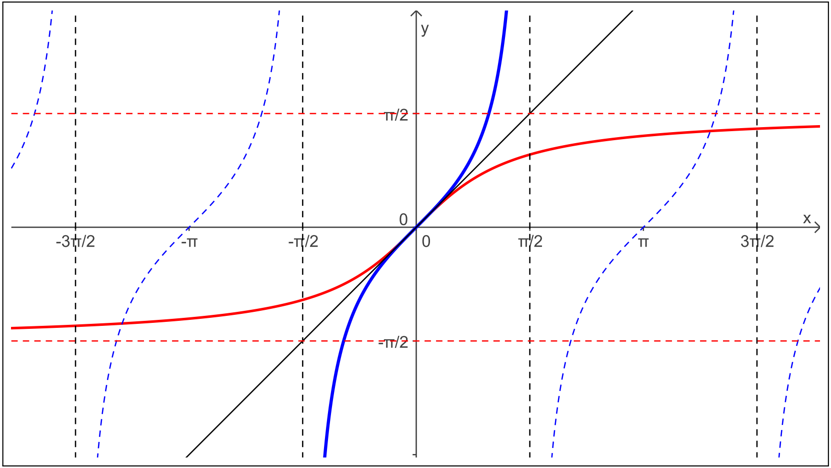


$$\begin{array}{rccl} f: & (-\pi/2, +\pi/2) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \mathrm{tg}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



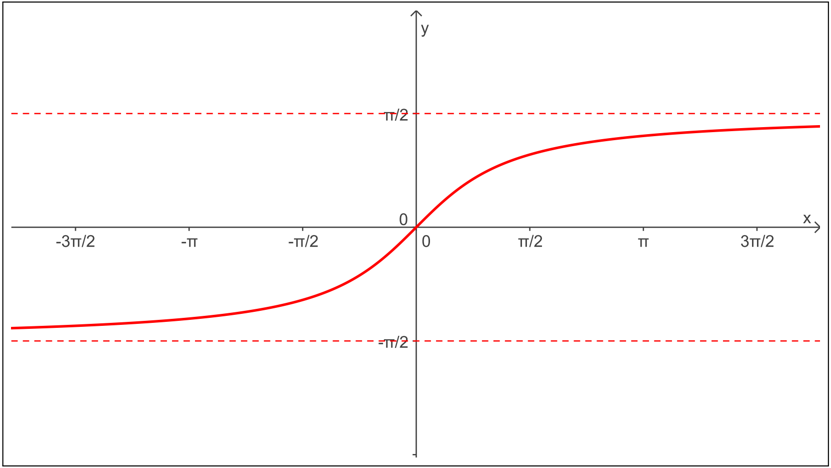
A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & (-\pi/2, +\pi/2) \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



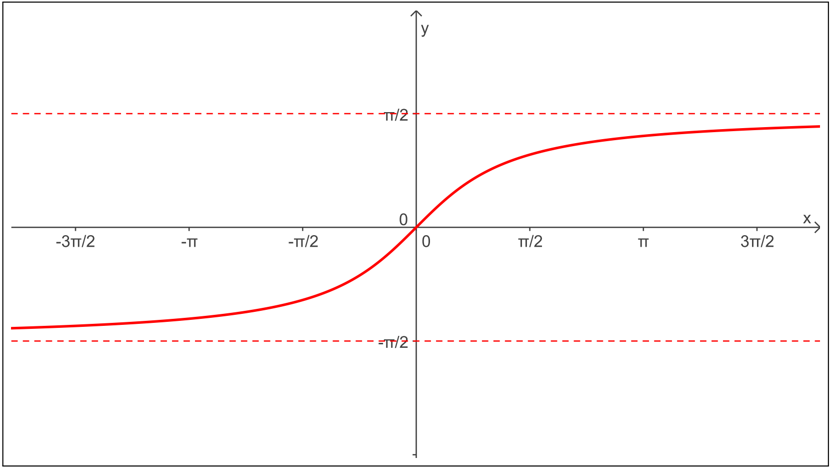
A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & (-\pi/2, +\pi/2) \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco tangente é derivável?

O teorema da função inversa garante que $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$.



Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \text{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \text{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \text{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \text{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \text{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \operatorname{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Novo item na tabela de derivadas!

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}(u)\right] = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

Função	Derivada
$y = u^c$	$\dfrac{dy}{dx} = c \cdot u^{c-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \text{sen}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = +\cos(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \cos(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\,\text{sen}(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \text{tg}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = +\sec^2(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \text{arcsen}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = +\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \arccos(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \text{arctg}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = +\dfrac{1}{1+u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = e^u$	$\dfrac{dy}{dx} = e^u \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \ln(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$