Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 15

21 de maio de 2009

Mais derivadas

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(2)] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(2)] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(2)] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \ln(2)\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\cdot\ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x\cdot\ln(2)}\right] = e^{x\cdot\ln(2)}\cdot\frac{d}{dx}[x\cdot\ln(2)] = e^{x\cdot\ln(2)}\cdot\ln(2) = 2^x\cdot\ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(2)] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(2)] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \ln(2)\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(2)}\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \ln(2)\right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Mais geralmente, se $y = f(x) = a^x$, com $a > 0$, então

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x \cdot \ln(a).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(x)}\right] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\
&= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1).
\end{aligned}$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x\cdot\ln(x)}\right] = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x\cdot\ln(x)}\right] = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(x)}\right] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x\cdot\ln(x)}\right] = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1).\end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(x)}\right] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(x)}\right] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(x)}\right] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left[x \cdot \ln(x)\right] \\ &= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x \cdot \ln(x)}\right] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Mais geralmente, se $y = f(x) = \log_b(x)$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, então

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\log_b(x)\right] = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}.$$

Novos itens na tabela de derivadas!

$$\frac{d}{dx}\left[a^u\right] = a^u \cdot \ln(a) \cdot \frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[\log_b(u)\right] = \frac{1}{u \cdot \ln(b)} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Diferenciação implícita

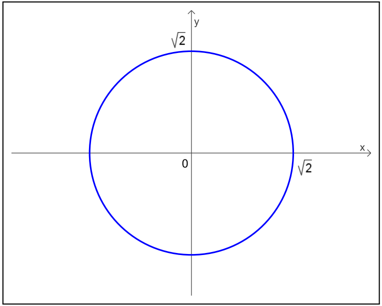
Motivação

$$x^2 + y^2 = 2$$

Este círculo não é gráfico de uma função que depende de x!

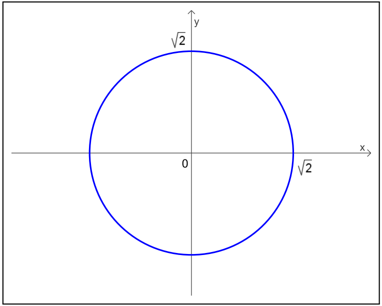
Motivação

$$x^2 + y^2 = 2$$



Este círculo não é gráfico de uma função que depende de x!

$$x^2 + y^2 = 2$$



Este círculo não é gráfico de uma função que depende de x!

Motivação

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = 2 - x^2$$

$$\Downarrow$$

$$y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}.$$

Motivação

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = 2 - x^2$$

$$\Downarrow$$

$$y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}.$$

Motivação

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$\Downarrow$$
$$y^2 = 2 - x^2$$
$$\Downarrow$$
$$y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}.$$

Motivação

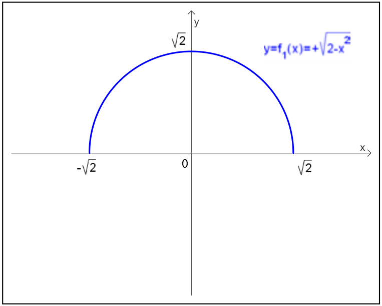
$$x^2 + y^2 = 2$$

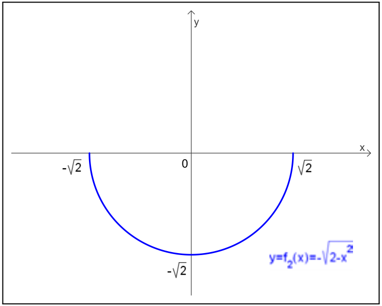
$$\Downarrow$$

$$y^2 = 2 - x^2$$

$$\Downarrow$$

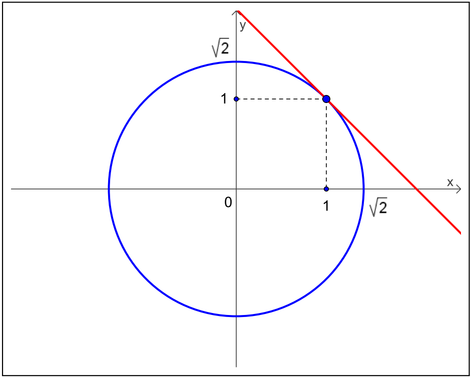
$$y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}.$$



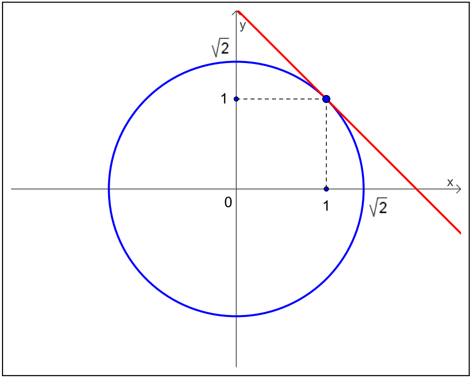


Motivação

Como calcular a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$?



Como calcular a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$?



Uma saída: use a função $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$!

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}\right]\Bigg|_{x=1} \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + [-1] \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2 - x.$$

Derivação implícita

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} \right] \Bigg|_{x=1} \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + [-1] \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2 - x.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} \right] \Bigg|_{x=1} \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + [-1] \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2 - x.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}\right]\Bigg|_{x=1} \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + [-1] \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2 - x.$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1)\cdot(x-1) = 1 + (-1)\cdot(x-1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1)\cdot(x - 1) = 1 + (-1)\cdot(x - 1) = 2 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \;\Rightarrow\; 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x - 3) = 3 + (-1)\cdot(x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}[6\,xy] \quad \Rightarrow \quad 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \quad \Rightarrow \quad 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
$x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \quad \Rightarrow \quad 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \quad \Rightarrow \quad 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x - 3) = 3 + (-1)\cdot(x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3,3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3+y^3 = 6\,xy \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left[x^3+y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \quad\Rightarrow\quad 3\,x^2+3\,y^2\,y' = 6\,y+6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2+3\,(3)^2\,y' = 6\,(3)+6\,(3)y' \quad&\Rightarrow\quad 27+27\,y' = 18+18\,y' \\ &\Rightarrow\quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3,3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x-3) = 3 + (-1)\cdot(x-3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
$x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \;\Rightarrow\; 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\,[6\,xy] \quad\Rightarrow\quad 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
$x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\,[6\,xy] \quad\Rightarrow\quad 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad\Rightarrow\quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y'$$
$$\Rightarrow\quad y' = f_1'(3) = -1.$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x - 3) = 3 + (-1)\cdot(x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3+y^3 = 6\,xy \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left[x^3+y^3\right] = \frac{d}{dx}\,[6\,xy] \quad\Rightarrow\quad 3\,x^2+3\,y^2\,y' = 6\,y+6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad\Rightarrow\quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y'$$

$$\Rightarrow\quad y' = f_1'(3) = -1.$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x-3) = 3 + (-1)\cdot(x-3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \;\Rightarrow\; 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \quad \Rightarrow \quad 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3+y^3 = 6\,xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^3+y^3\right] = \frac{d}{dx}\,[6\,xy] \quad \Rightarrow \quad 3\,x^2+3\,y^2\,y' = 6\,y+6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x-3) = 3 + (-1)\cdot(x-3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6\,xy \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^3 + y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[6\,xy\right] \;\Rightarrow\; 3\,x^2 + 3\,y^2\,y' = 6\,y + 6\,xy'.$$

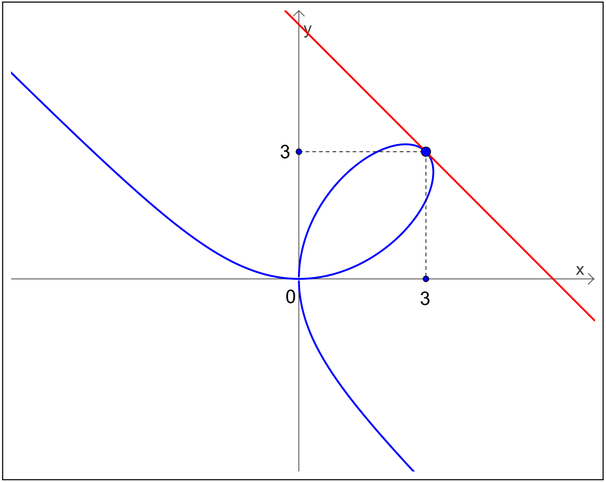
Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow \quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow \quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

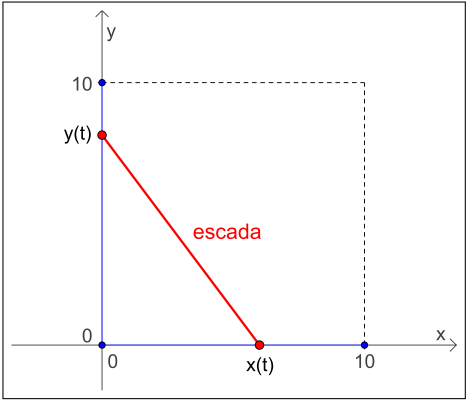
O fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ e a reta tangente $y = 6 - x$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.



Taxas relacionadas

Exemplo

Uma escada de 10 m de comprimento está apoiada sobre uma parede. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade constante de 1 m/s, com que velocidade o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 6 m da parede?



Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad & \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\ & \Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned}
[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\
&\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned}
[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\
&\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad & \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\ & \Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100]$$

$$\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t).$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad & \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\ & \Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\ &\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\ &\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\ &\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned}
[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\
&\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100\ \text{cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25\ \text{cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \Rightarrow \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3\right] \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100\ \text{cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25\ \text{cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3\right] \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t) = 4\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\pi}$ cm/s.

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100\ \text{cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\,[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100\ \text{cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25\ \text{cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t).$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\displaystyle\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \frac{1}{25\,\pi}$ cm/s.