Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

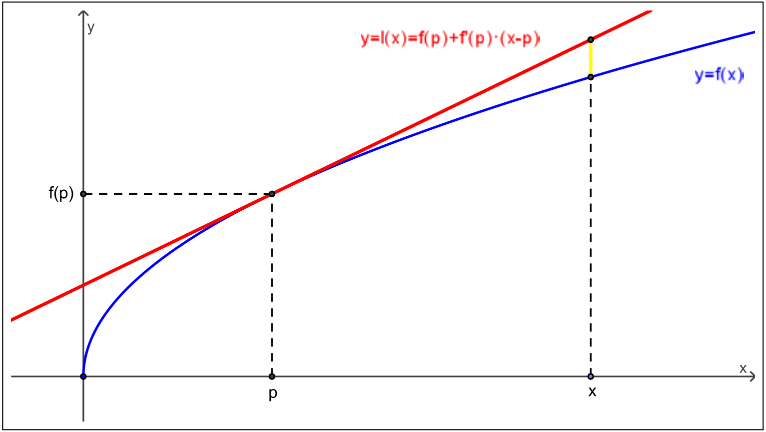
Universidade Federal Fluminense

Aula 16

26 de maio de 2009

Aproximações lineares (afins)

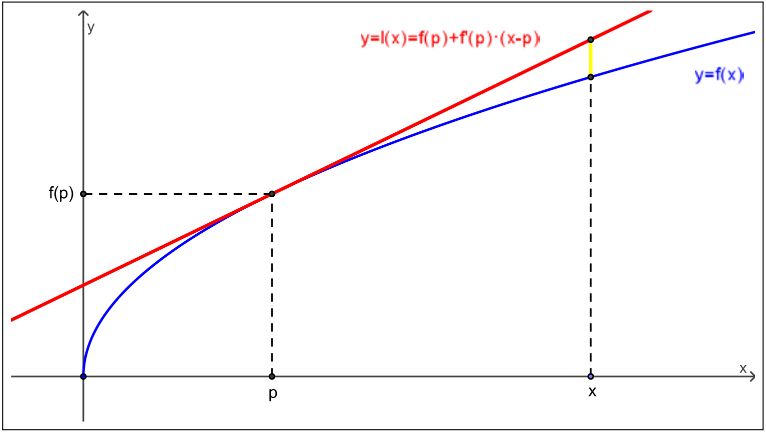
Aproximações lineares (afins)



$y = l(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$.

$y = l(x)$ é uma função afim que aproxima $y = f(x)$ perto do ponto p.

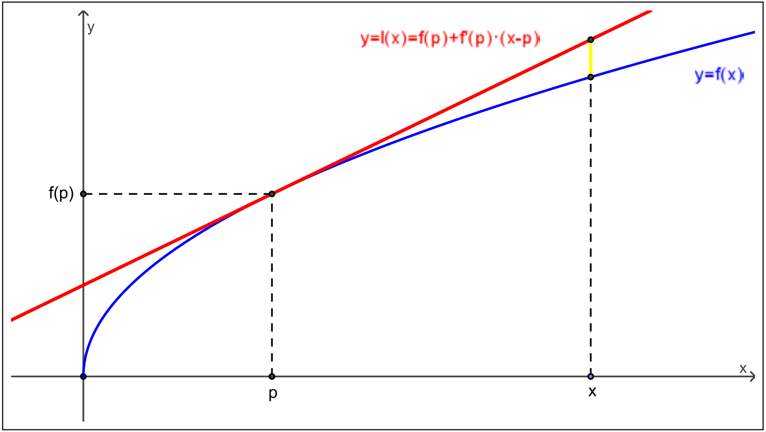
Aproximações lineares (afins)



$y = l(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$.

$y = l(x)$ é uma função afim que aproxima $y = f(x)$ perto do ponto p.

Aproximações lineares (afins)



$y = l(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$.

$y = l(x)$ é uma função afim que aproxima $y = f(x)$ perto do ponto p.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Polinômios de Taylor

Polinômios de Taylor de ordem 1

Qual é a melhor reta $y = l(x) = a\,x + b$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

É necessário algum critério para decidir qual reta é "melhor" do que a outra!

Usaremos os critérios:

(1) $l(p) = f(p)$ e (2) $l'(p) = f'(p)$.

Polinômios de Taylor de ordem 1

Qual é a melhor reta $y = l(x) = a\,x + b$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

É necessário algum critério para decidir qual reta é "melhor" do que a outra!

Usaremos os critérios:

(1) $l(p) = f(p)$ e (2) $l'(p) = f'(p)$.

Qual é a melhor reta $y = l(x) = a\,x + b$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

É necessário algum critério para decidir qual reta é "melhor" do que a outra!

Usaremos os critérios:

(1) $l(p) = f(p)$ e (2) $l'(p) = f'(p)$.

Qual é a melhor reta $y = l(x) = a\,x + b$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

É necessário algum critério para decidir qual reta é "melhor" do que a outra!

Usaremos os critérios:

(1) $l(p) = f(p)$ e (2) $l'(p) = f'(p)$.

Qual é a melhor reta $y = l(x) = a\,x + b$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

É necessário algum critério para decidir qual reta é "melhor" do que a outra!

Usaremos os critérios:

(1) $l(p) = f(p)$ e (2) $l'(p) = f'(p)$.

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Polinômios de Taylor de ordem 1

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - ap = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = ax + b = f'(p)x + f(p) - f'(p)p = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

$$\text{onde } y = l(x) = a\,x + b.$$

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

$$\text{onde } y = l(x) = a\,x + b.$$

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Polinômios de Taylor de ordem 1

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)\,(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Polinômios de Taylor de ordem 1

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)\,(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)\,(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Polinômios de Taylor de ordem 1

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

$$\text{onde } y = l(x) = a\,x + b.$$

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)\,(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Critérios:

$$(1)\ l(p) = f(p) \qquad \text{e} \qquad (2)\ l'(p) = f'(p),$$

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)\,(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Polinômios de Taylor de ordem 2

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2.$$

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Polinômios de Taylor de ordem 2

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Polinômios de Taylor de ordem 2

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Polinômios de Taylor de ordem 2

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Polinômios de Taylor de ordem 2

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Polinômios de Taylor de ordem n

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Polinômios de Taylor de ordem n

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Polinômios de Taylor de ordem n

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Polinômios de Taylor de ordem n

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Polinômios de Taylor de ordem n

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1 + 0.01 + (1/2)\,(0.01)^2 + (1/6)\,(0.01)^3 = 1.010050166666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1+0.01+(1/2)\,(0.01)^2+(1/6)\,(0.01)^3 = 1.01005016666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.01005016708416805\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1+0.01+(1/2)\,(0.01)^2+(1/6)\,(0.01)^3 = 1.01005016666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.01005016708416805 7\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1+0.01+(1/2)\,(0.01)^2+(1/6)\,(0.01)^3 = 1.010050166666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1 + 0.01 + (1/2)\,(0.01)^2 + (1/6)\,(0.01)^3 = 1.0100501666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1+0.01+(1/2)\,(0.01)^2+(1/6)\,(0.01)^3 = 1.0100501666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.0100501670841680 57\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1+0.01+(1/2)\,(0.01)^2+(1/6)\,(0.01)^3 = 1.0100501666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.0100501670841680 57\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1+0.01+(1/2)\,(0.01)^2+(1/6)\,(0.01)^3 = 1.010050166666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.01005016708416805\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1+0.01+(1/2)\,(0.01)^2+(1/6)\,(0.01)^3 = 1.0100501666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1 + 0.01 + (1/2)\,(0.01)^2 + (1/6)\,(0.01)^3 = 1.0100501666666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

Exemplo

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1 + 0.01 + (1/2)\,(0.01)^2 + (1/6)\,(0.01)^3 = 1.0100501666666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

Exemplo

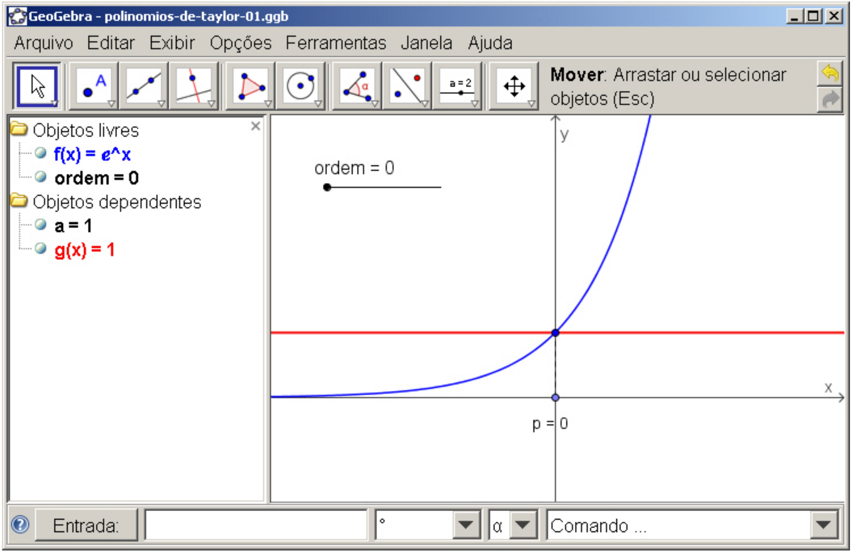
Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

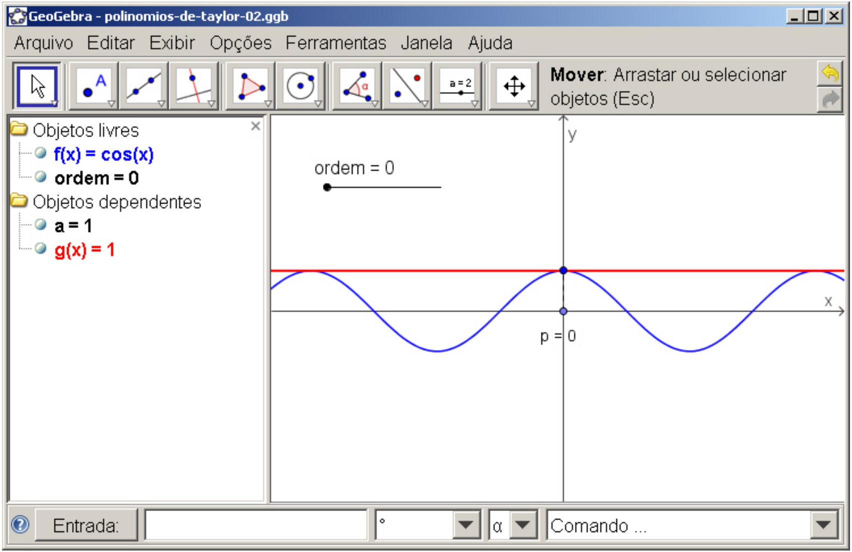
$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_4(0.01) = 1 + 0.01 + (1/2)(0.01)^2 + (1/6)(0.01)^3 = 1.0100501666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

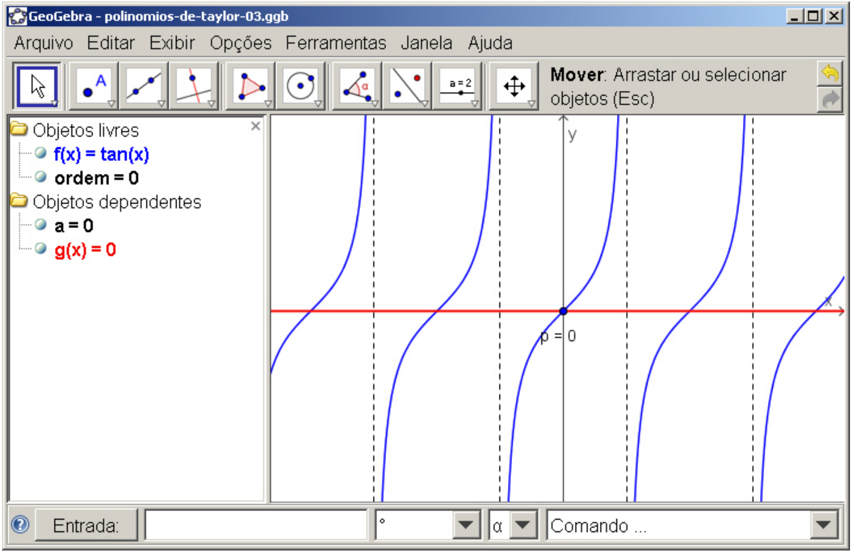
Exemplo


GeoGebra - polinomios-de-taylor-01.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover: Arrastar ou selecionar objetos (Esc)
Objetos livres
f(x) = e^x
ordem = 0
Objetos dependentes
a = 1
g(x) = 1
ordem = 0
y
x
p = 0
Entrada:
Comando ...

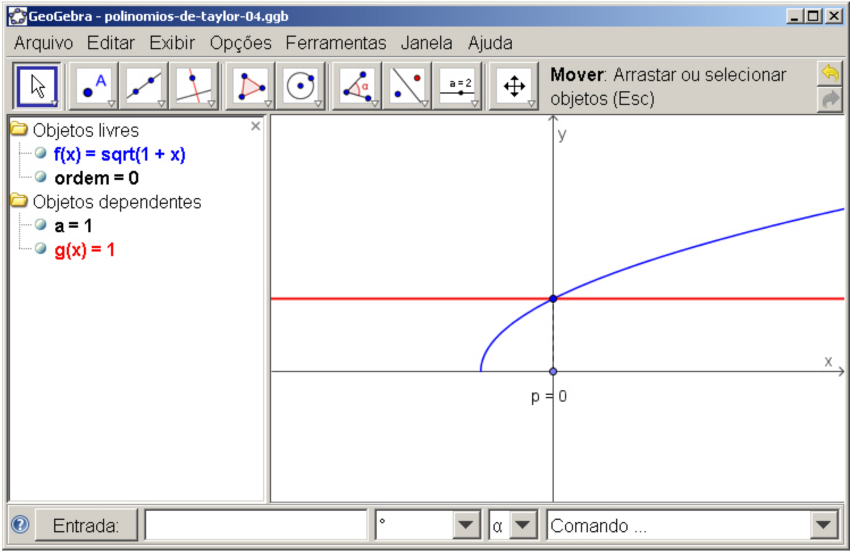
Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$



Exemplo: $y = f(x) = \operatorname{tg}(x)$



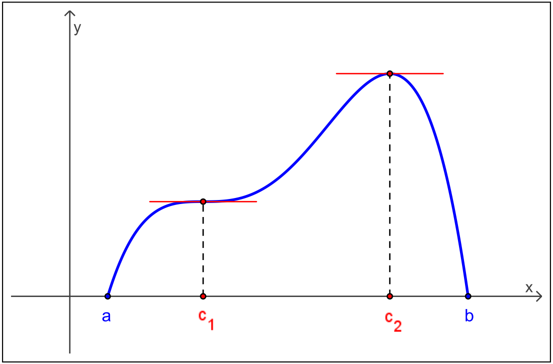
Exemplo: $y = f(x) = \sqrt{1+x}$



O teorema de Rolle e o teorema do valor médio

Teorema

Seja f uma função derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Exemplo

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2\,n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2\,n + 1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2\,n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2n+1} + rx + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2n+1)x^{2n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2n+1)}_{>0}\underbrace{x^{2n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2n+1} + rx + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Exemplo

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2\,n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2\,n + 1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2\,n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Exemplo

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2\,n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2\,n + 1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2\,n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Exemplo

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2\,n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2\,n+1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2\,n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Exemplo

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2\,n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2\,n+1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2\,n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Exemplo

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2\,n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2\,n+1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2\,n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

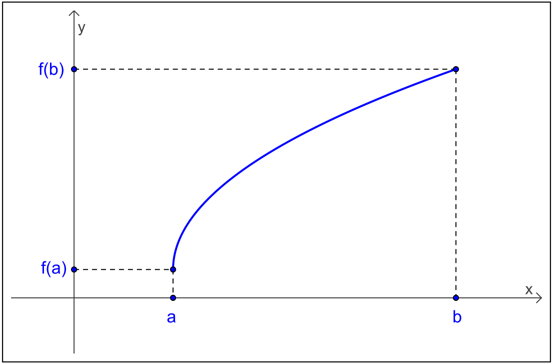
$$\underbrace{(2\,n + 1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

Isto mostra que $f(x) = x^{2n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Teorema

Se f é uma função derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

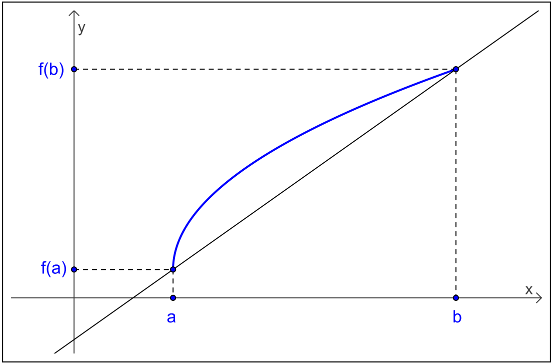
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Teorema

Se f é uma função derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

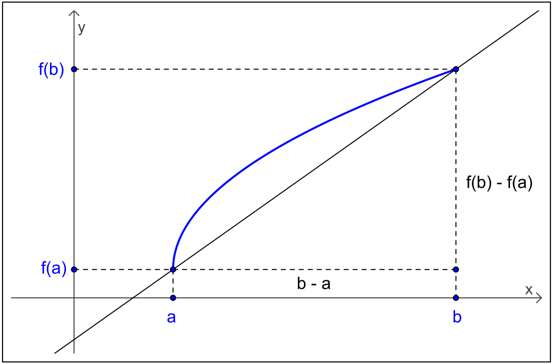
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Teorema

Se f é uma função derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

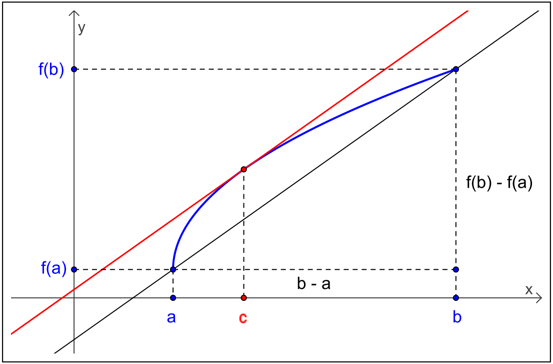
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Teorema

Se f é uma função derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Exemplo

Seja $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[-1,2]$, diferenciável em $(-1,2)$ com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2\,x$.

Solução. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (-1,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem coeficiente angular igual a 2 sendo, portanto, paralela à reta $y = 2\,x$.

Exemplo

Seja $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[-1,2]$, diferenciável em $(-1,2)$ com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2\,x$.

Solução. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (-1,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem coeficiente angular igual a 2 sendo, portanto, paralela à reta $y = 2\,x$.

Exemplo

Seja $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[-1,2]$, diferenciável em $(-1,2)$ com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2\,x$.

Solução. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (-1,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem coeficiente angular igual a 2 sendo, portanto, paralela à reta $y = 2\,x$.

Exemplo

Seja $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[-1,2]$, diferenciável em $(-1,2)$ com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2\,x$.

Solução. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (-1,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem coeficiente angular igual a 2 sendo, portanto, paralela à reta $y = 2\,x$.

Exemplo

Seja $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[-1,2]$, diferenciável em $(-1,2)$ com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2\,x$.

Solução. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (-1,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem coeficiente angular igual a 2 sendo, portanto, paralela à reta $y = 2\,x$.

Exemplo

Seja $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[-1,2]$, diferenciável em $(-1,2)$ com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2\,x$.

Solução. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (-1,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem coeficiente angular igual a 2 sendo, portanto, paralela à reta $y = 2\,x$.