Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 18

9 de junho de 2009

As funções hiperbólicas

Definições e identidades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

Definições e identidades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

Definições e identidades

$$
\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \operatorname{senh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{tgh}(x) &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}, \\
\operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)}, & \operatorname{cossech}(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, & \operatorname{cotgh}(x) &= \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},
\end{aligned}
$$

$$
\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).
$$

Definições e identidades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

Definições e identidades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

Definições e identidades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \quad \text{e} \quad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

Definições e identidades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

Definições e identidades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \quad \text{e} \quad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

Definições e identidades

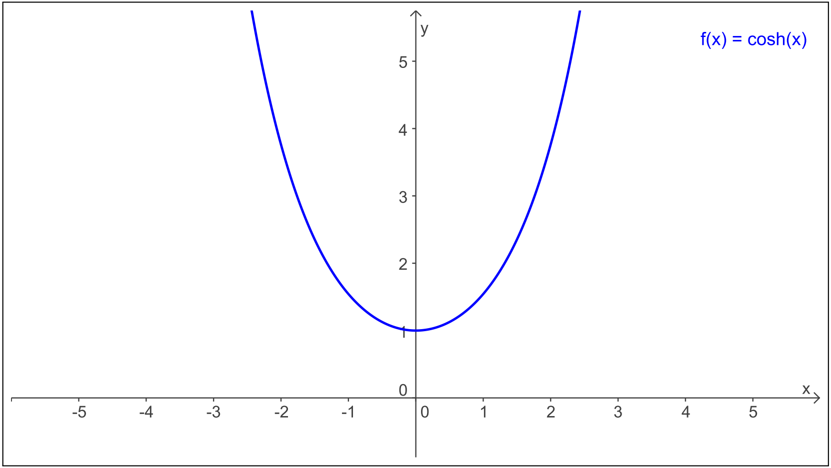
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

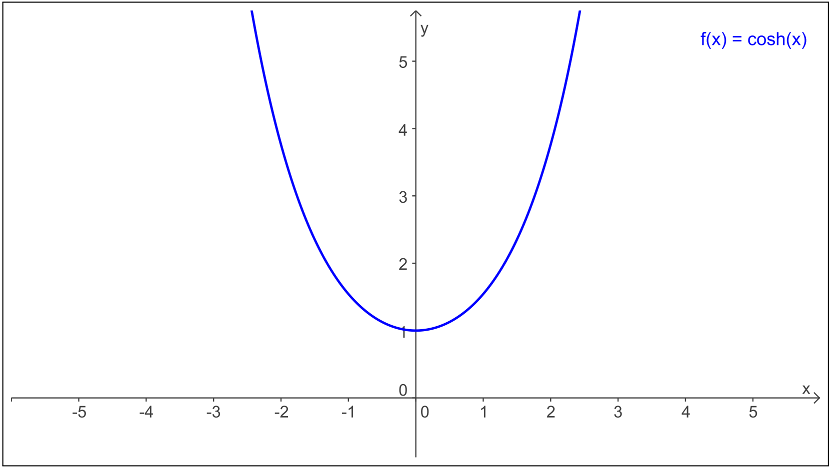
$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

A função cosseno hiperbólico

Se $y = f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, então $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$.

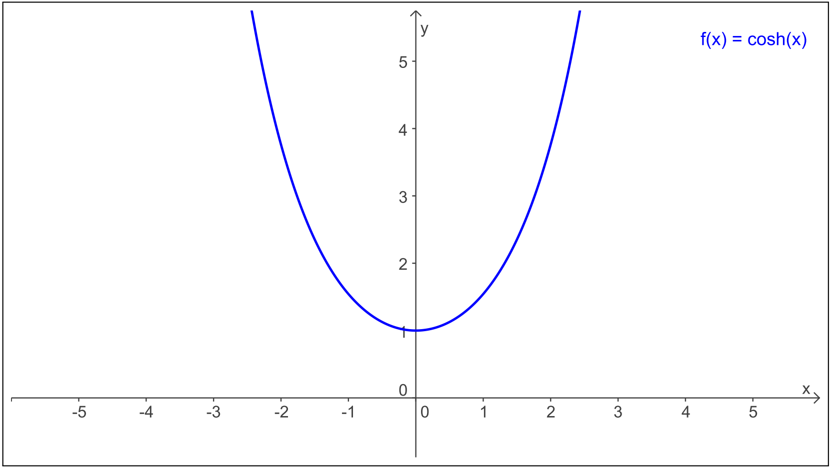


$$\text{Se } y = f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ então } f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x).$$



A função cosseno hiperbólico

$$\text{Se } y = f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ então } f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh}(x).$$



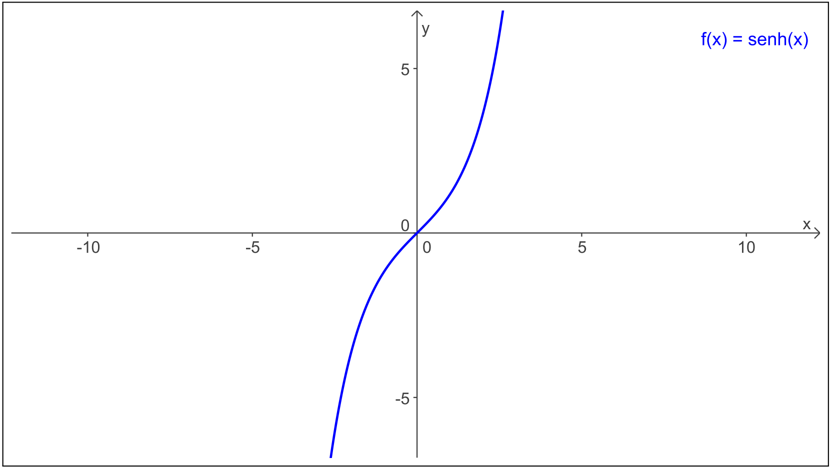
A catenária

A catenária

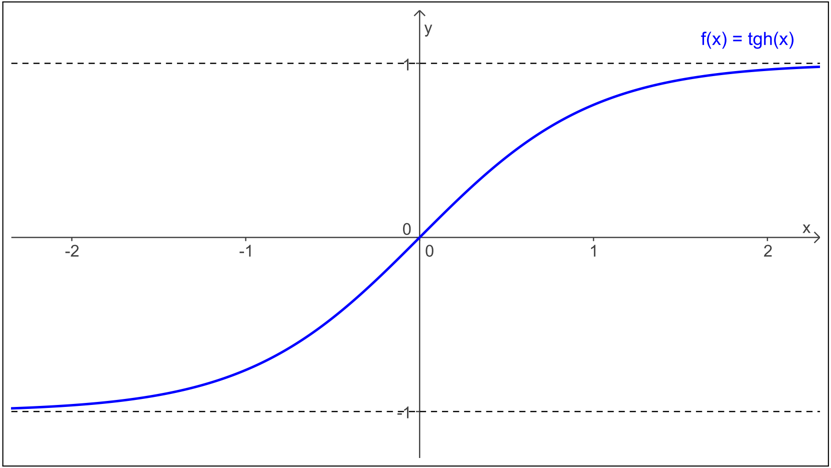
A catenária

A função seno hiperbólico

$$\text{Se } y = f(x) = \text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ então } f'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

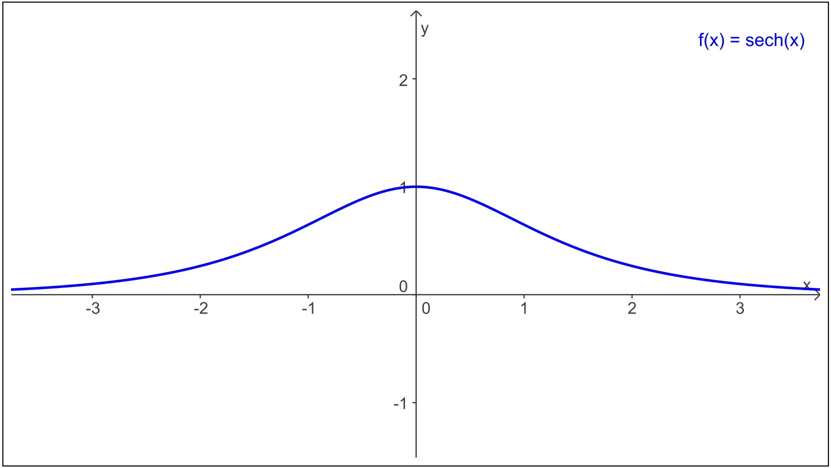


$$\text{Se } y = f(x) = \text{tgh}(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}, \text{ então } f'(x) = \text{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$



A função secante hiperbólica

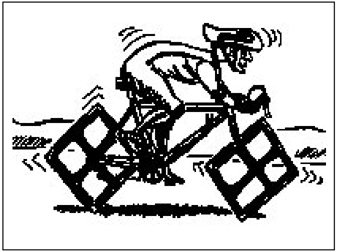
Se $y = f(x) = \operatorname{sech}(x)$, então $f'(x) = -\operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)$.



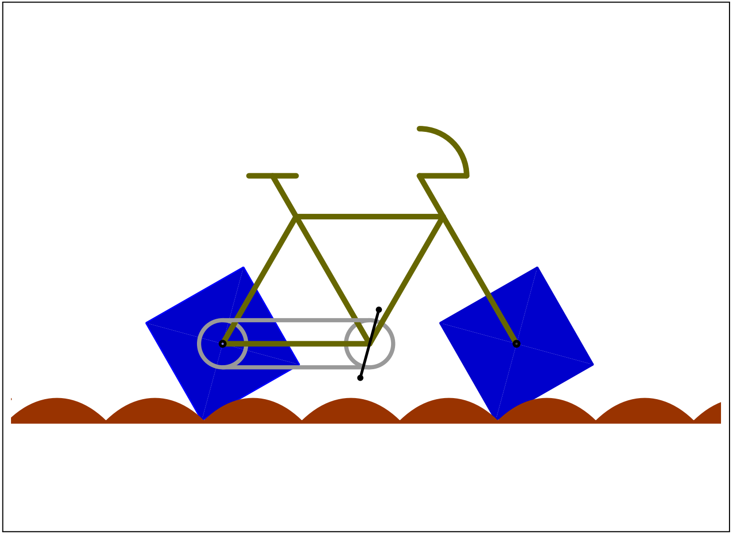
Derivadas das funções hiperbólicas

Função	Derivada
$y = \cosh(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh}(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \operatorname{senh}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = \cosh(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \operatorname{tgh}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \operatorname{sech}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{sech}(u) \cdot \operatorname{tgh}(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \operatorname{cossech}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cossech}(u) \cdot \operatorname{cotgh}(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = \operatorname{cotgh}(u)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cossech}^2(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$

Bicicletas com rodas quadradas



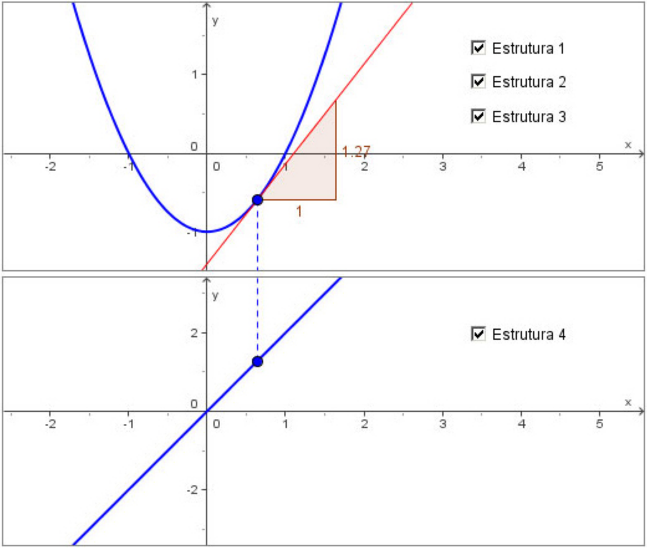
Bicicletas com rodas quadradas



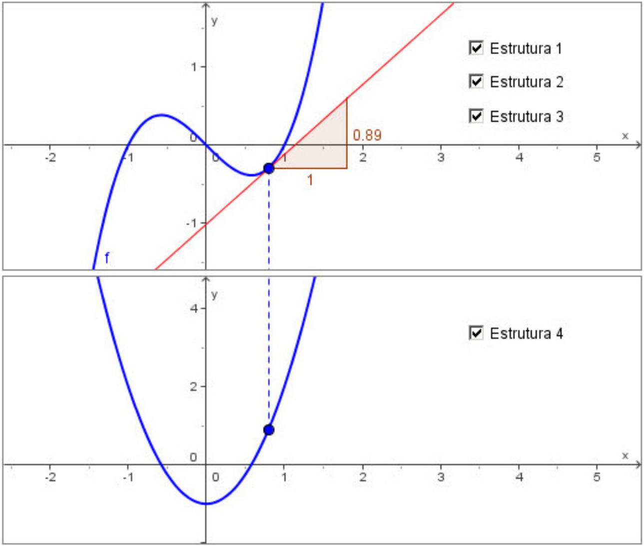
Bicicletas com rodas quadradas

Derivadas, funções crescentes e decrescentes

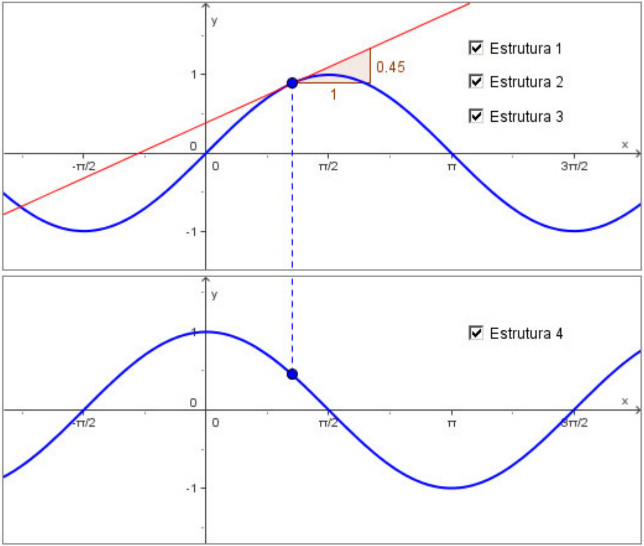
Exemplo



Exemplo



Exemplo



y
1
0.45
1
0
-π/2
0
π/2
π
3π/2
x
-1
Estrutura 1
Estrutura 2
Estrutura 3
y
1
0
0
-π/2
π/2
π
3π/2
x
-1
Estrutura 4

Funções crescentes e decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Definição

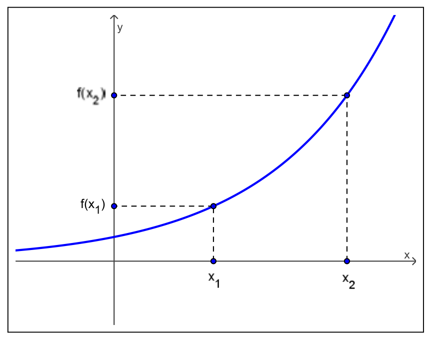
Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$



Funções crescentes e decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Definição

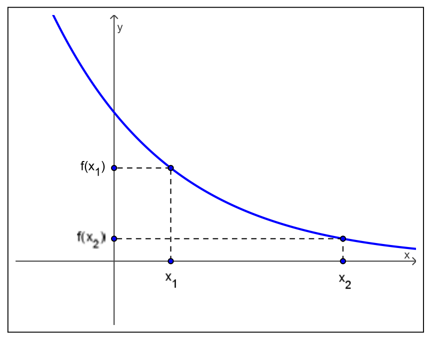
Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$



Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f é diferenciável em I.

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.

Demonstração: use o teorema do valor médio para derivadas!

Crescimento e decrescimento em intervalos

Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f é diferenciável em I.

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.

Demonstração: use o teorema do valor médio para derivadas!

Crescimento e decrescimento em intervalos

Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f é diferenciável em I.

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.

Demonstração: use o teorema do valor médio para derivadas!

Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f é diferenciável em I.

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.

Demonstração: use o teorema do valor médio para derivadas!

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \stackrel{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \stackrel{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:

Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:

Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:

Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:

Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

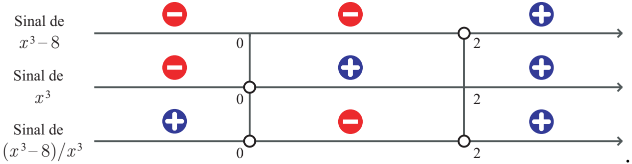
Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:

Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:



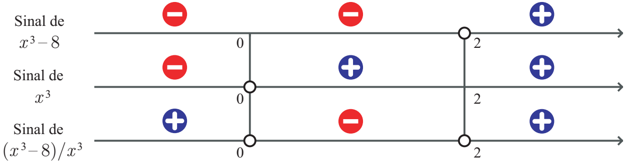
.

Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:



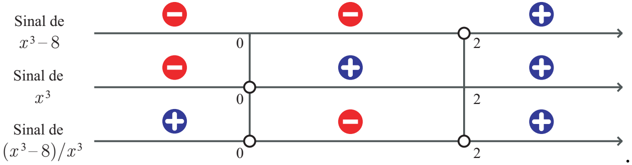
.

Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

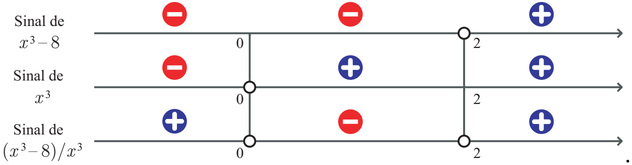
Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:

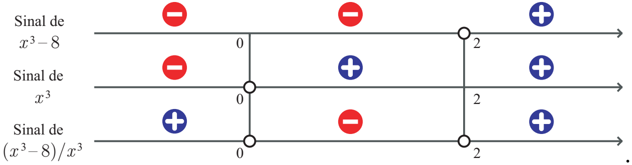


Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

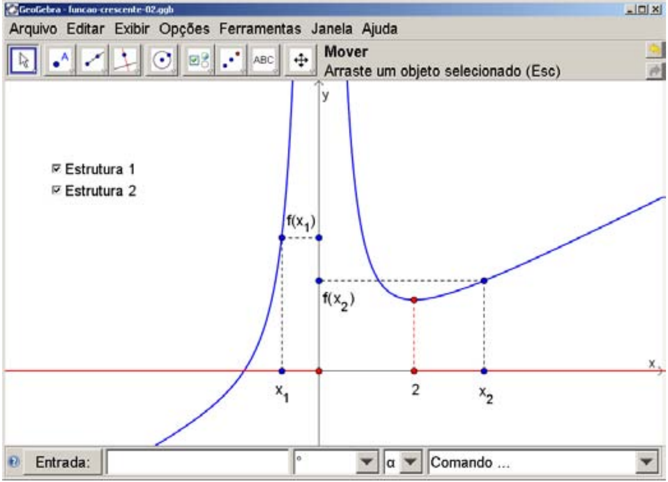
Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Cuidado!

A função $y = f(x) = x + 4/x^2$ não é crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$!



Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1+x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1+x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1+x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1+x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1+x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1+x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$