Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 19

16 de junho de 2009

Na última aula

Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f é diferenciável em I.

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

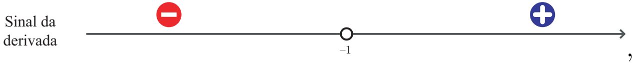
Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:



,

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

,

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

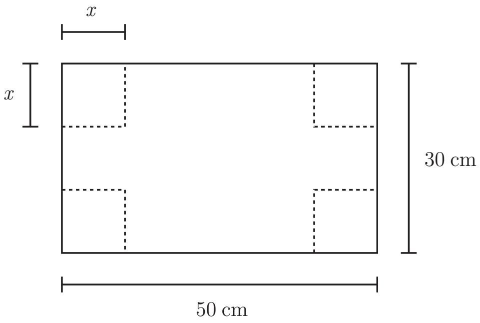
,

pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Máximos e mínimos

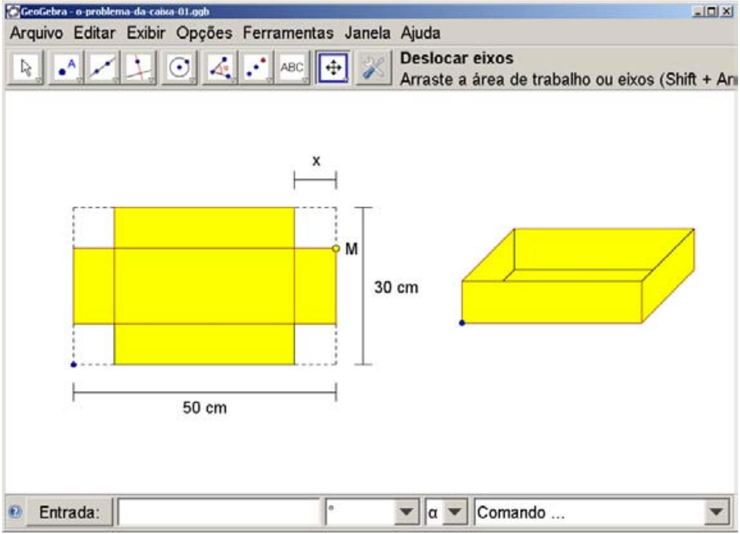
Motivação: o problema da caixa

Você foi contratado por uma empresa que fabrica caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de um folha retangular de papelão medindo 30 cm $\times$ 50 cm. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão.



Dependendo do valor de x, diferentes caixas (com diferentes volumes) podem ser confeccionadas. O problema é determinar o valor de x a fim de que a caixa correspondente tenha o maior volume possível.

Motivação: o problema da caixa



Extremos globais

Definição

Seja $f \colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Extremos globais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Extremos locais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Extremos locais

Definição

Seja $f \colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Extremos locais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

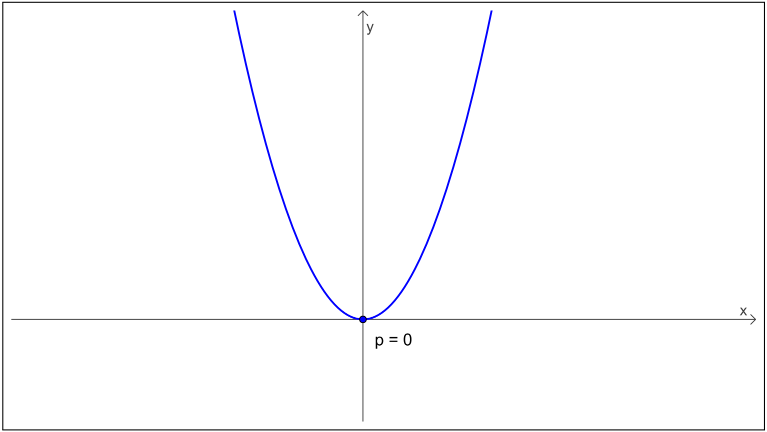
$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

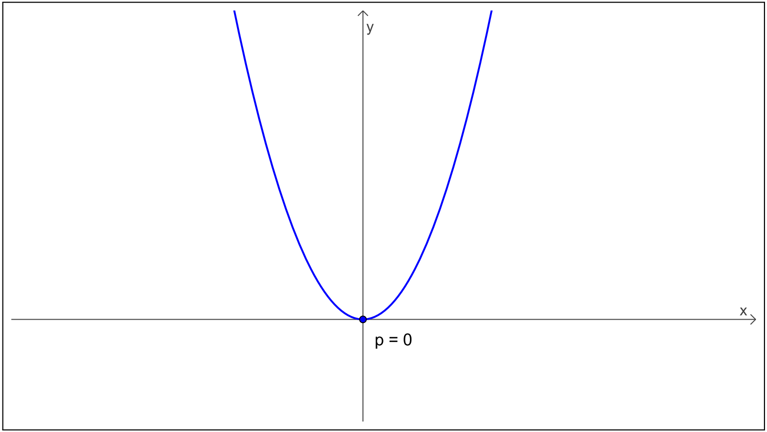
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

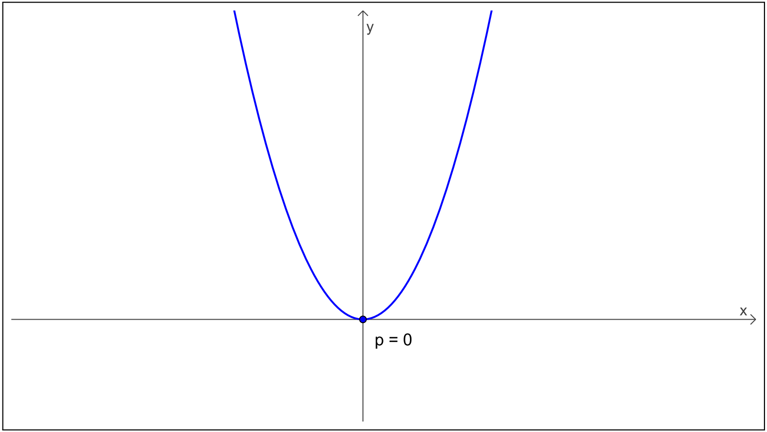
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

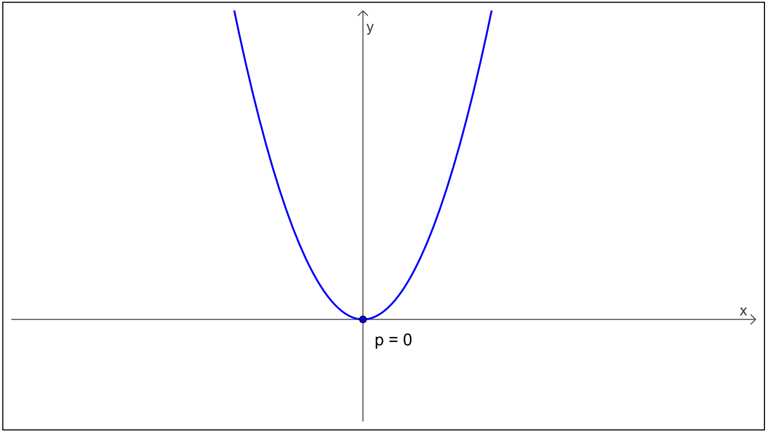
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

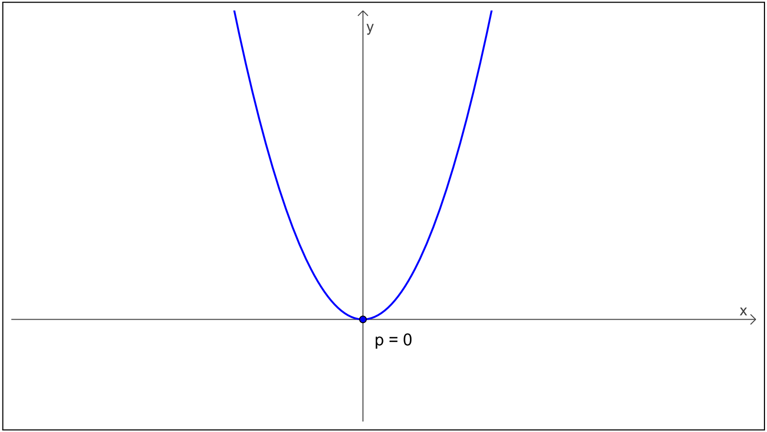
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

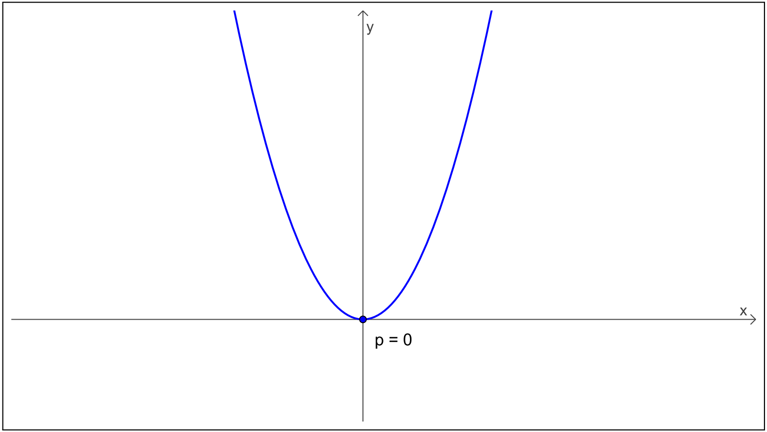
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

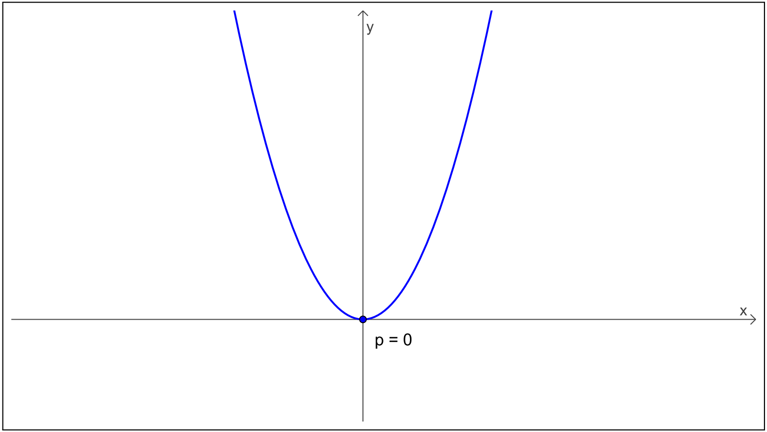
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \qquad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

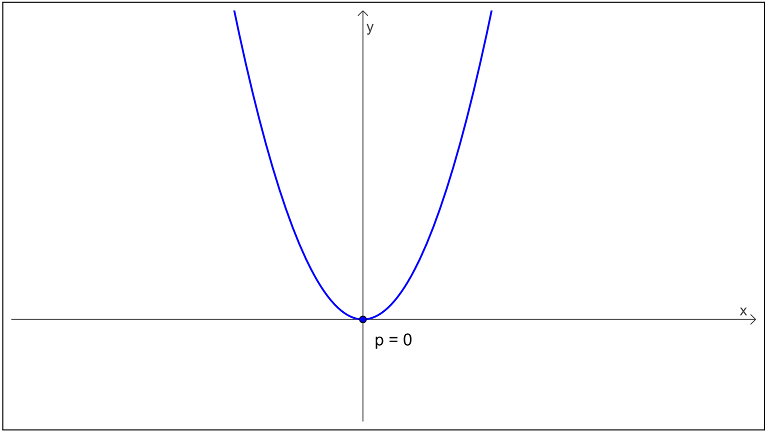
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$y = f(x) = x^2$ não possui pontos de máximo global em $A = \mathbb{R}$, pois

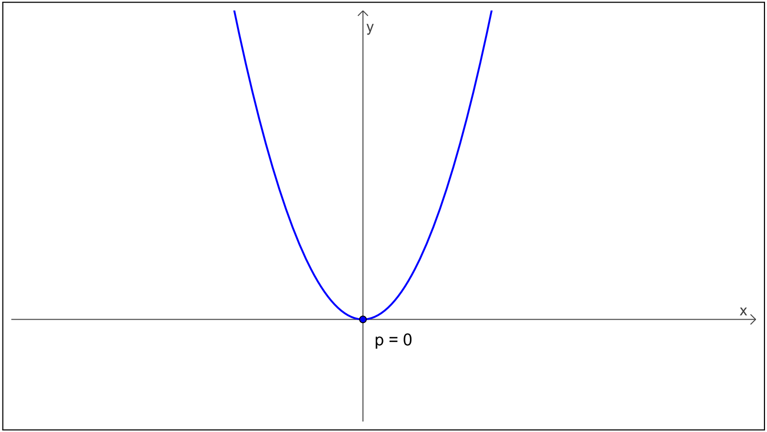
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$y = f(x) = x^2$ não possui pontos de máximo global em $A = \mathbb{R}$, pois

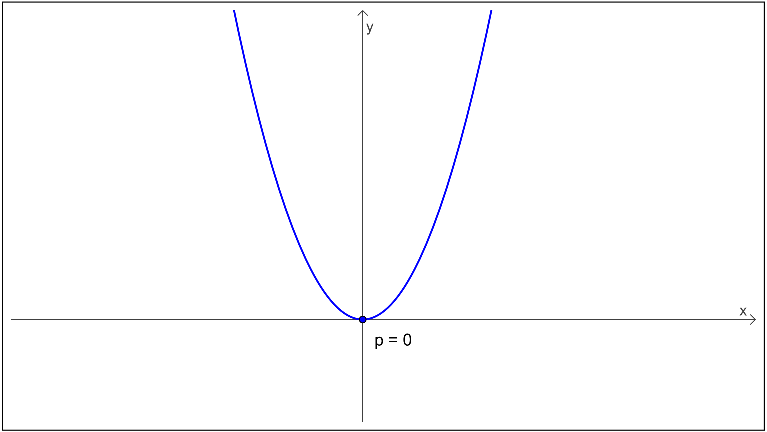
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

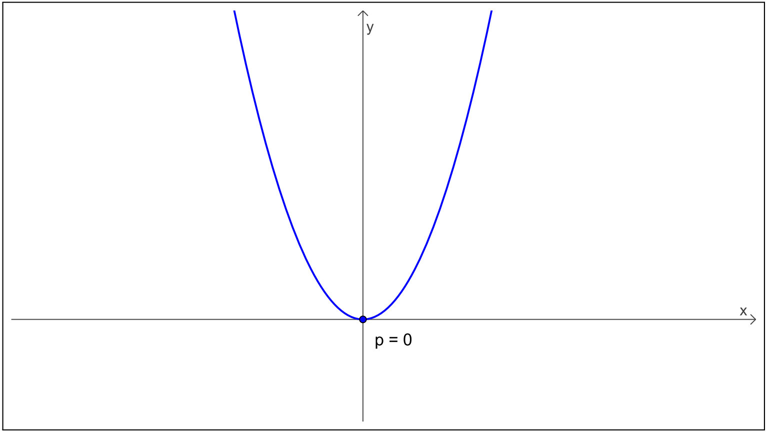
$p = 0$ é o único extremo local de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$.

Ele é um ponto de mínimo local de f em $A = \mathbb{R}$.



$p = 0$ é o único extremo local de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$.

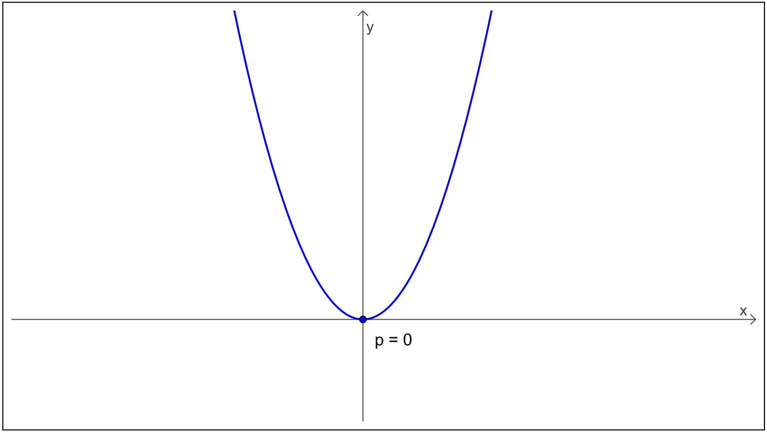
Ele é um ponto de mínimo local de f em $A = \mathbb{R}$.



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é o único extremo local de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$.

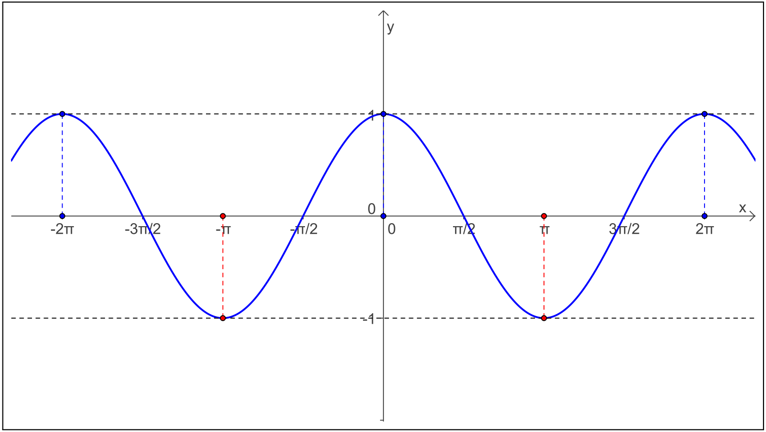
Todo extremo global também é um extremo local!



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

Todos os pontos da forma $p = 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de máximo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

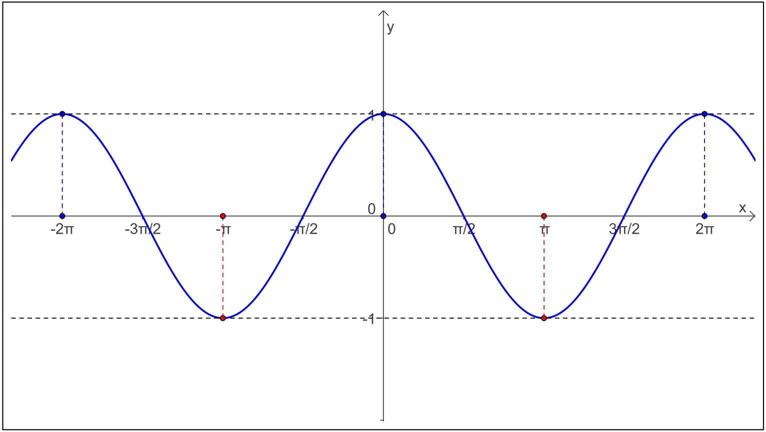
$$f(p) = f(2\,k\,\pi) = 1 \geq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

Todos os pontos da forma $p = 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de máximo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

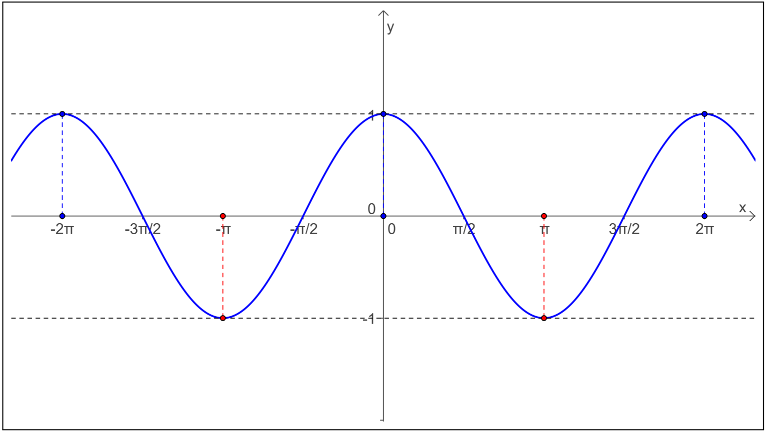
$$f(p) = f(2\,k\,\pi) = 1 \geq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

Todos os pontos da forma $p = 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de máximo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

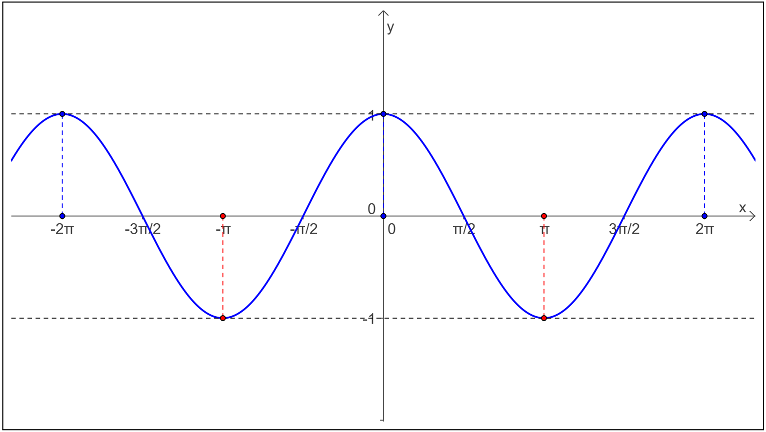
$$f(p) = f(2\,k\,\pi) = 1 \geq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

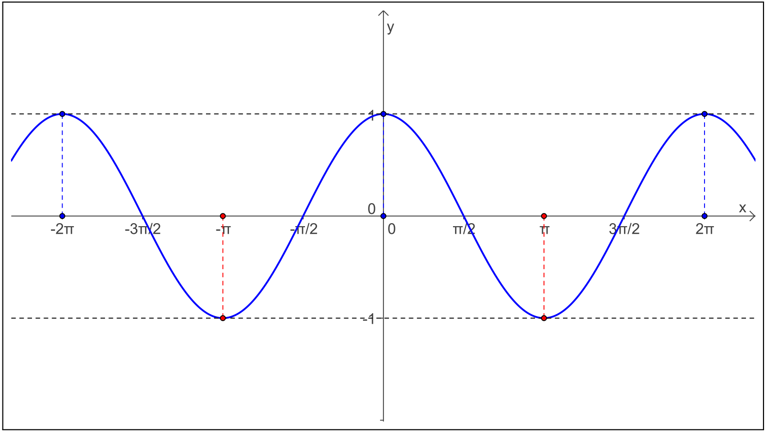
Todos os pontos da forma $p = 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de máximo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

$$f(p) = f(2\,k\,\pi) = 1 \geq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Todos os pontos da forma $p = 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de máximo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

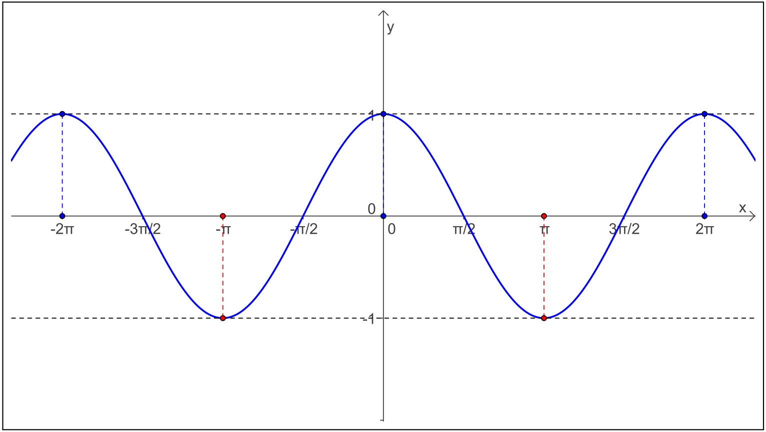
$$f(p) = f(2\,k\,\pi) = 1 \geq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

Todos os pontos da forma $p = 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de máximo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

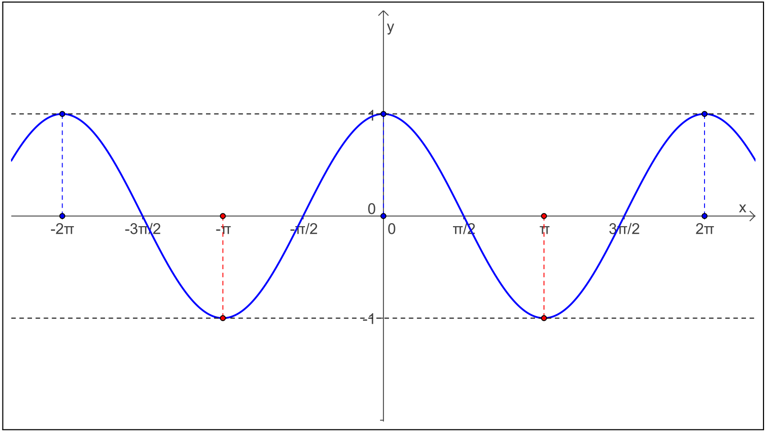
$$f(p) = f(2\,k\,\pi) = 1 \geq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

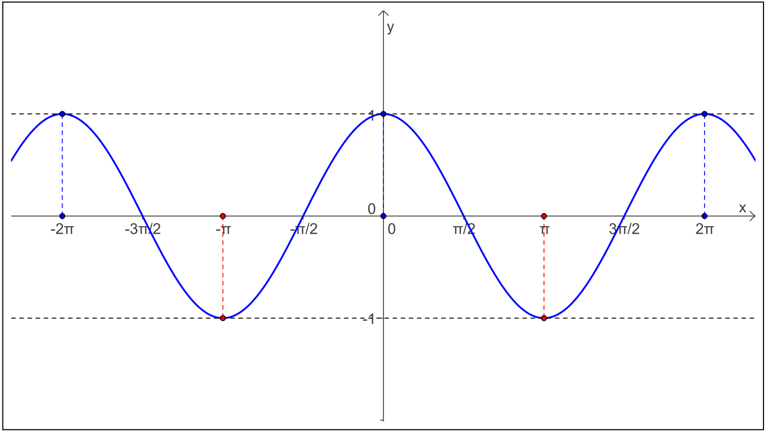
Todos os pontos da forma $p = 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de máximo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

$$f(p) = f(2\,k\,\pi) = 1 \geq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

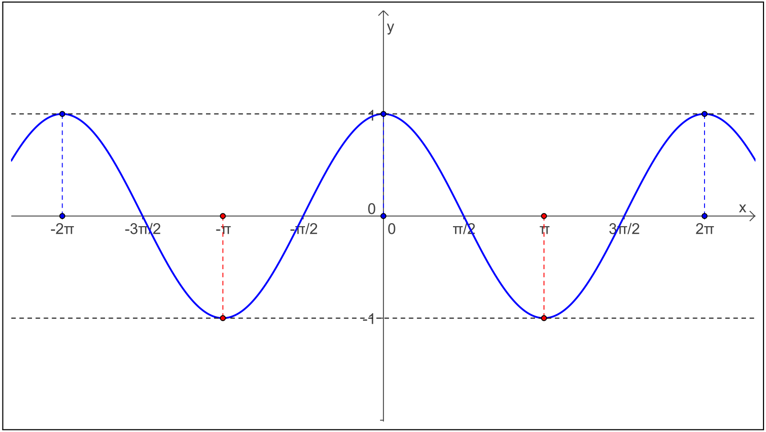
$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

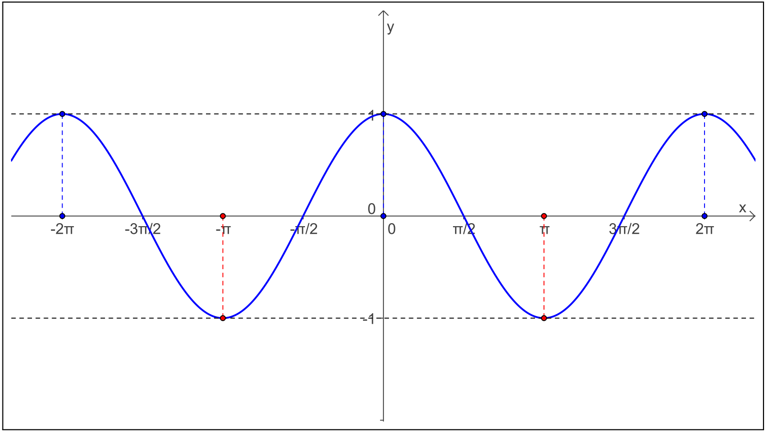
$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

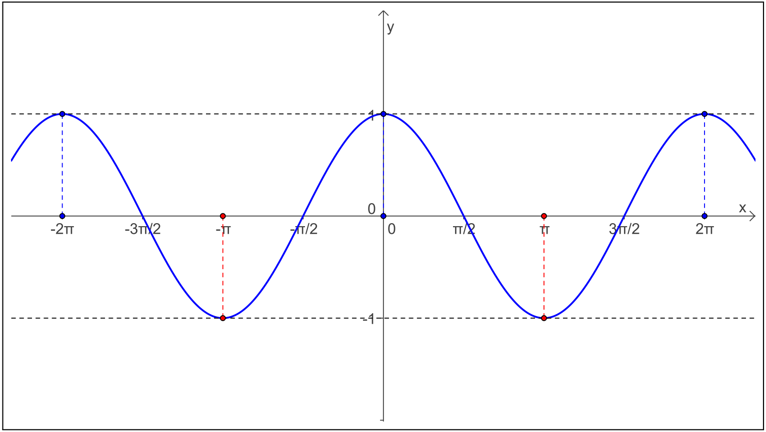
Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



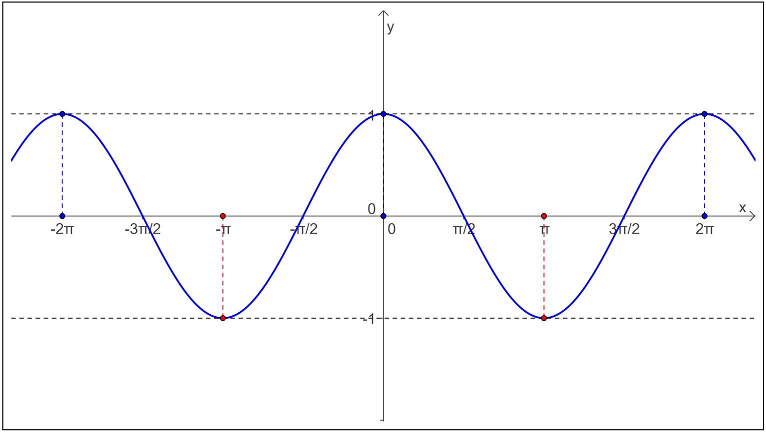
Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



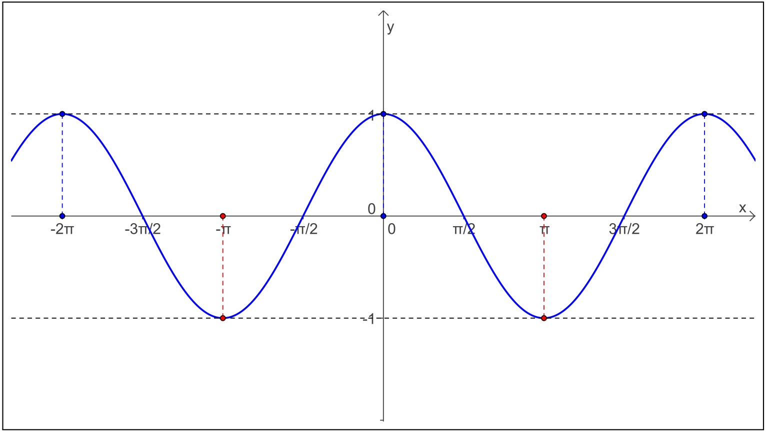
Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

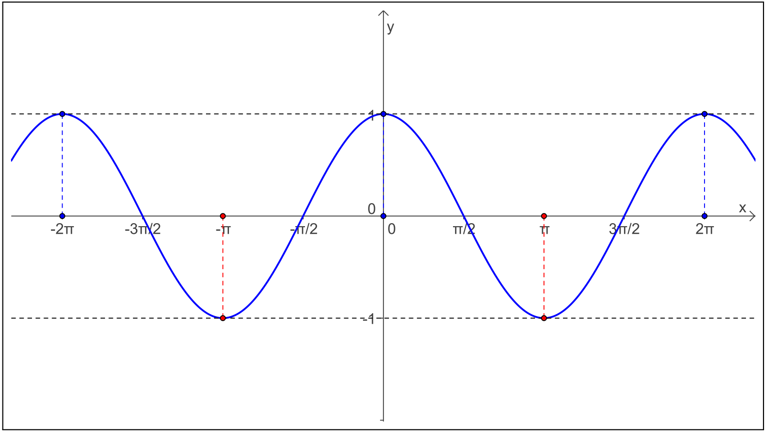
$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

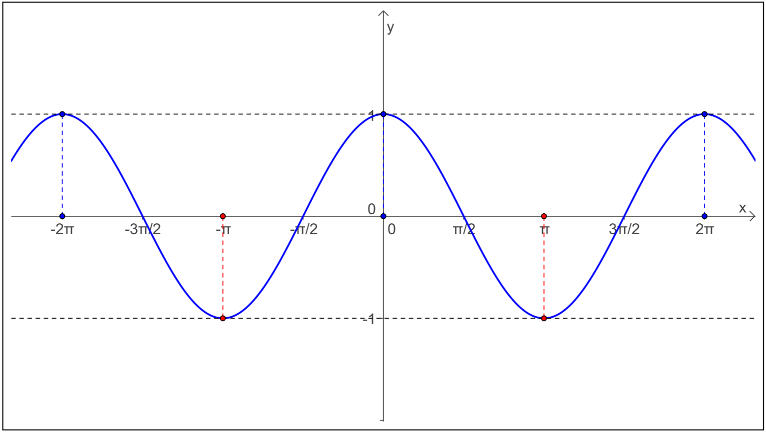
Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



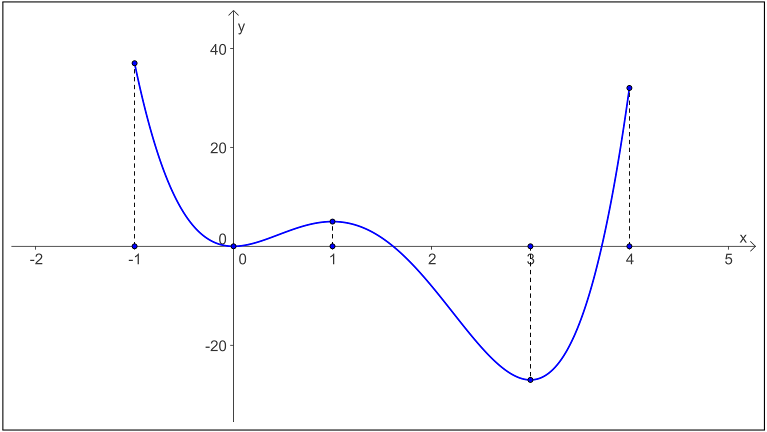
Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

Não existem extremos locais que não sejam extremos globais.



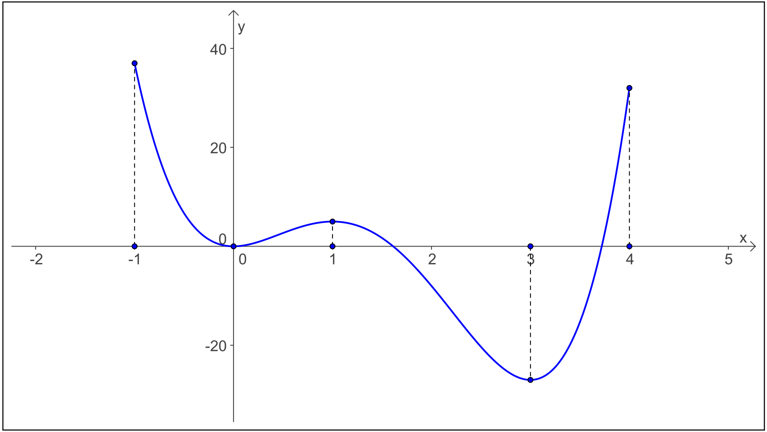
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de máximo global de f em A é $p = -1$.

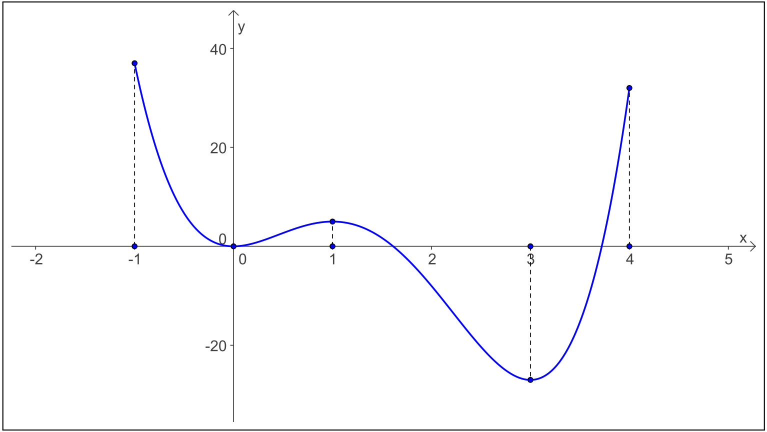


Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de máximo global de f em A é $p = -1$.

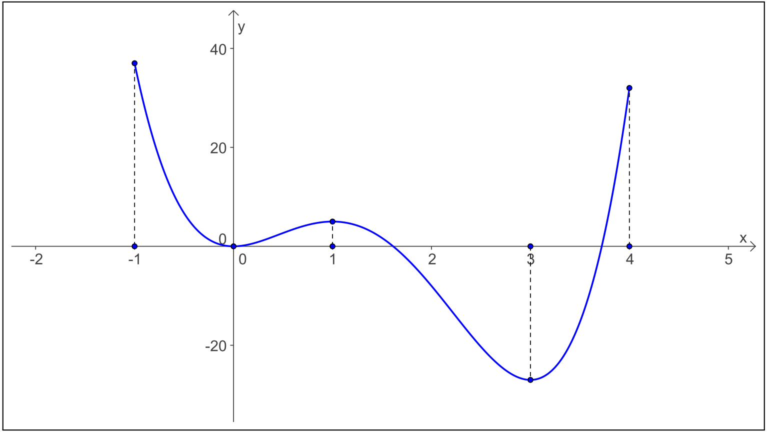


O ponto de máximo global de f em A é $p = -1$.

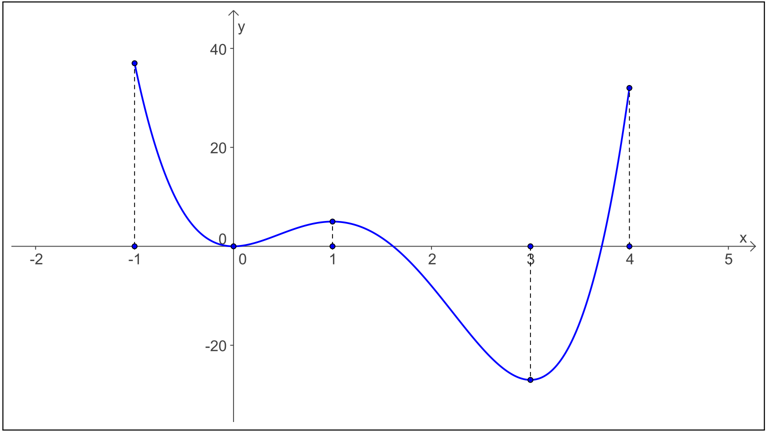


Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo global de f em A é $p = 3$.

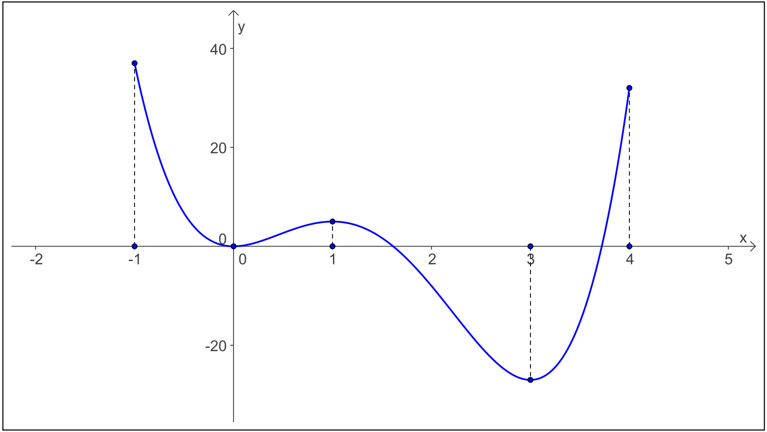


O ponto de mínimo global de f em A é $p = 3$.



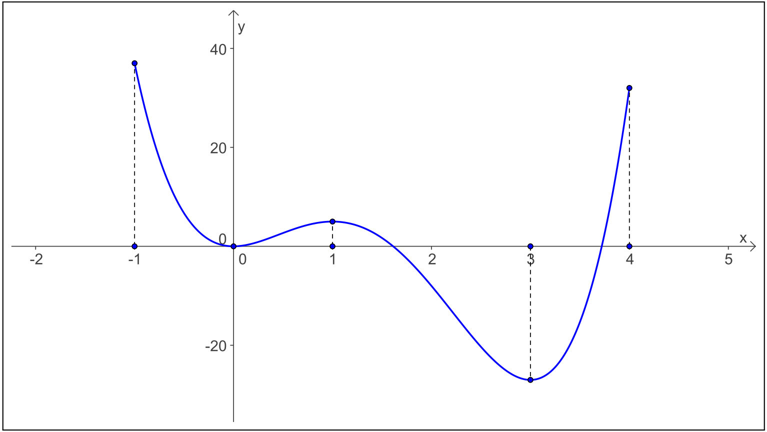
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$ e $q = 4$.



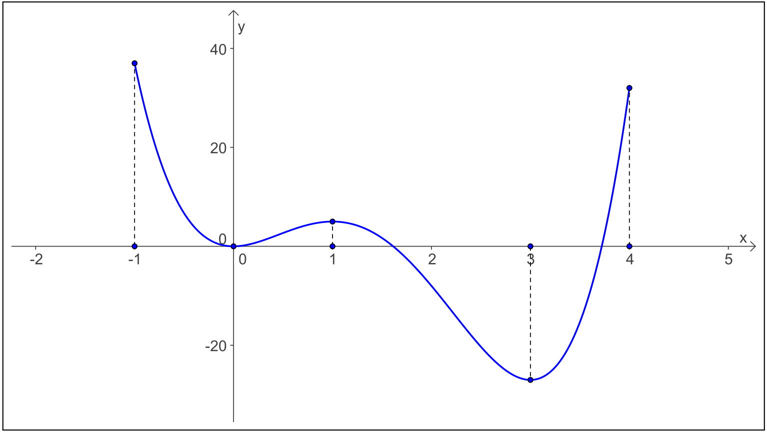
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$ e $q = 4$.



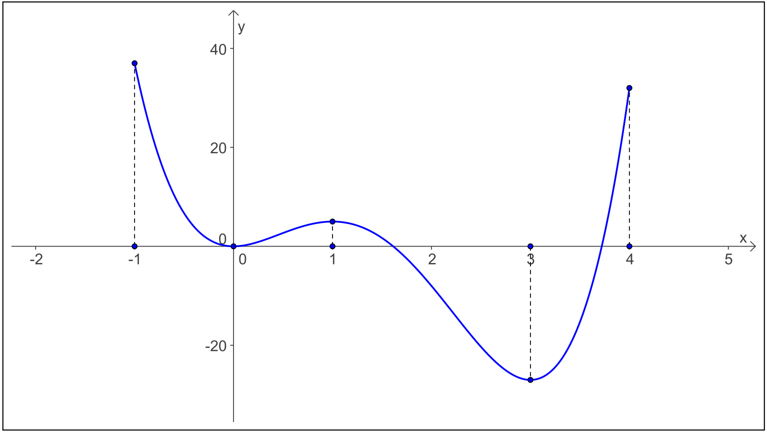
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$ e $q = 4$.

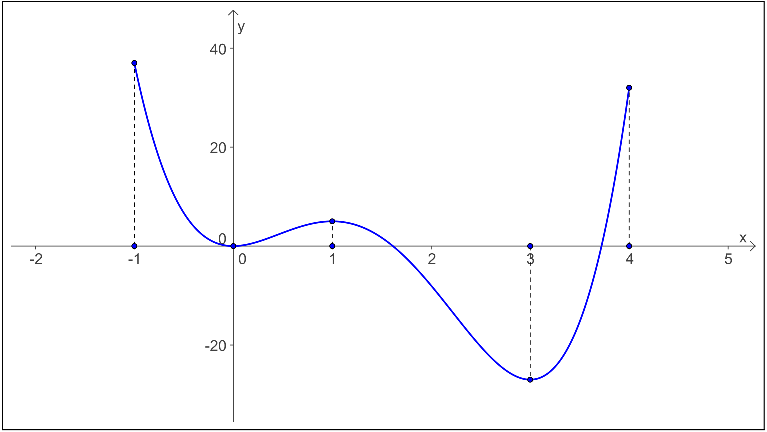


Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo local de f em A que não é global é $p = 0$.

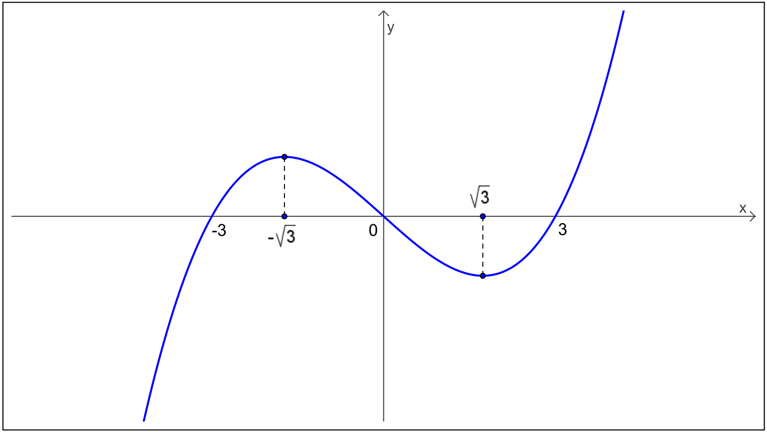


O ponto de mínimo local de f em A que não é global é $p = 0$.



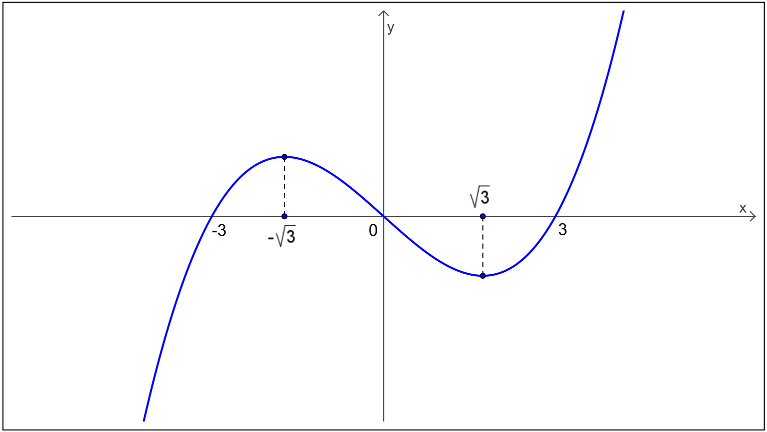
Exemplo: $y = f(x) = x\,(x-3)\,(x+3)$, $A = \mathbb{R}$

A função f possui apenas extremos locais em A: $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local e $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em A.



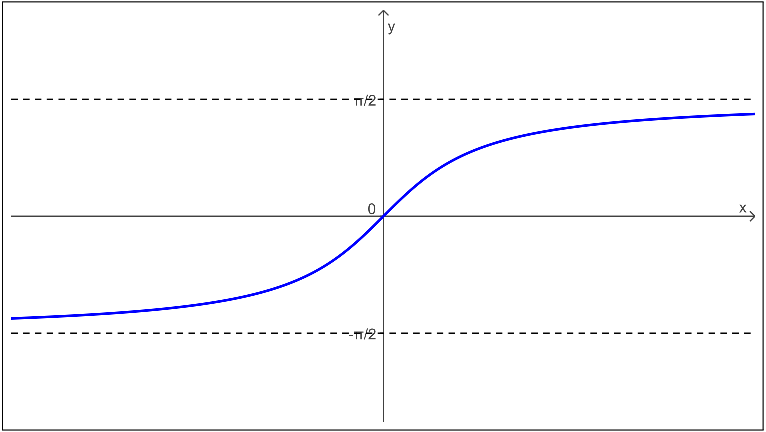
Exemplo: $y = f(x) = x\,(x-3)\,(x+3)$, $A = \mathbb{R}$

A função f possui apenas extremos locais em A: $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local e $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em A.



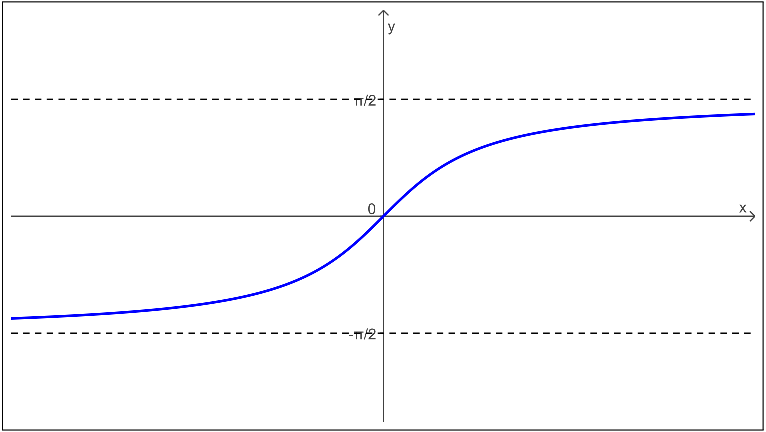
Exemplo: $y = f(x) = \text{arctg}(x)$, $A = \mathbb{R}$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



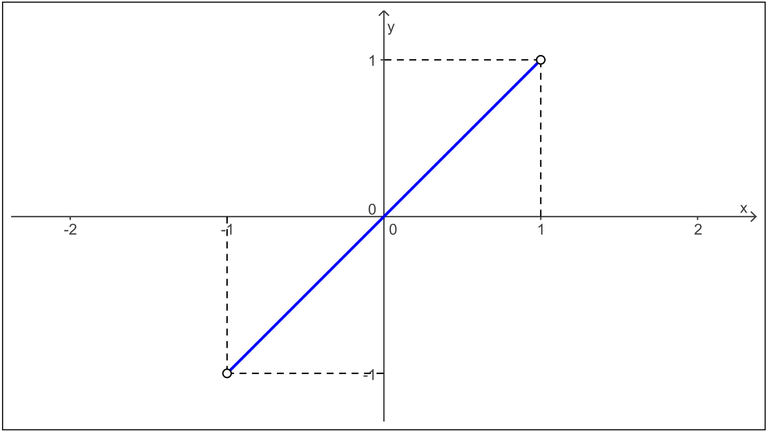
Exemplo: $y = f(x) = \text{arctg}(x)$, $A = \mathbb{R}$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



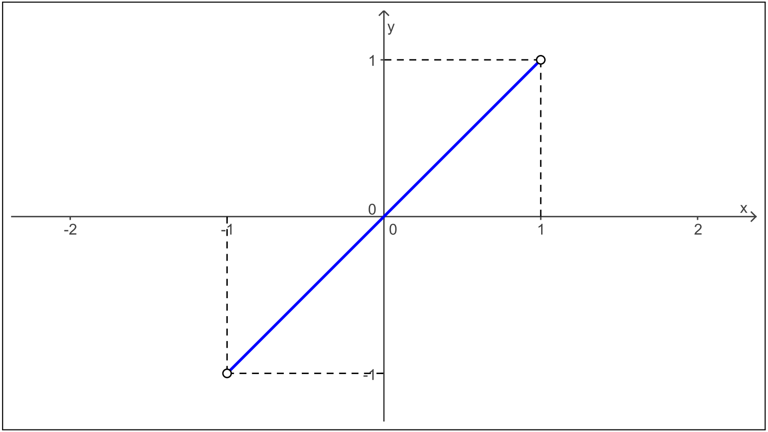
Exemplo: $y = f(x) = x$, $A = (-1, +1)$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



Exemplo: $y = f(x) = x$, $A = (-1, +1)$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



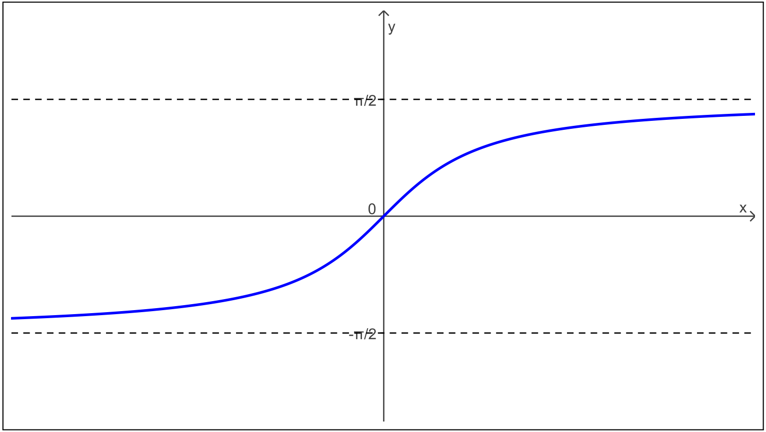
Quando é possível garantir a existência de extremos globais?

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$ uma função e A um subconjunto do domínio D. Se $A = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado e f é contínua em A, então f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em A.

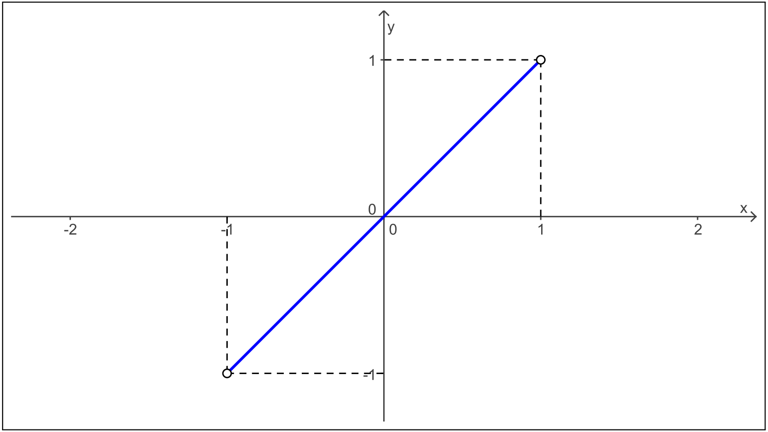
Cuidado!

No teorema de Weierstrass é importante que *A* seja um intervalo limitado!

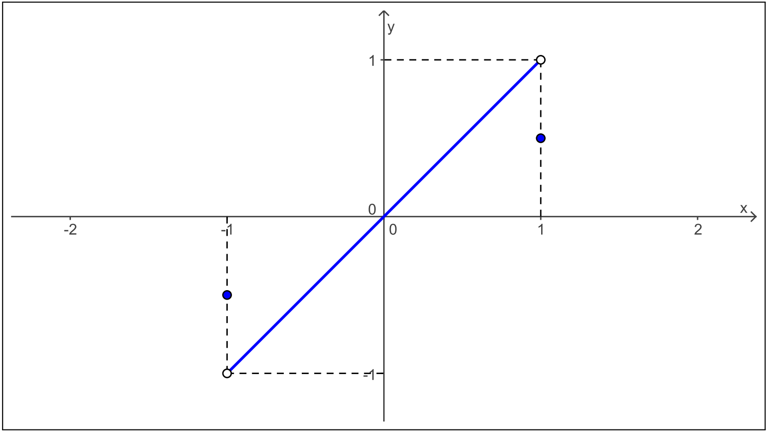


Cuidado!

No teorema de Weierstrass é importante que A seja um intervalo fechado!



No teorema de Weierstrass é importante que *f* seja uma função contínua!



Como calcular os extremos de uma função?

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$ e A um subconjunto do domínio D. Se p é um extremo local de f em A, f é diferenciável em p e p é ponto interior de A, então p é um ponto crítico de f, isto é,

$$f'(p) = 0.$$

Situação ideal

Se $A = [a, b]$ e f é contínua em $A = [a, b]$, então, pelo teorema de Weierstrass, f possui extremos globais em $A = [a, b]$.

Se um extremo global está no interior de A, isto é, se um extremo está no intervalo aberto (a, b) e se f é diferenciável em (a, b), então, pela regra de Fermat, este extremo deve ser um ponto crítico de f, isto é, ele deve anular a derivada de f.

Nesta situação ideal, os candidatos a extremos globais são os pontos críticos de f em (a, b), o ponto a e o ponto b. Para saber quem é ponto de máximo global e quem é ponto de mínimo global, basta avaliar a função f nos candidatos.

O problema da caixa se enquadra nesta situação ideal. Vamos resolvê-lo!

Situação ideal

Se $A = [a, b]$ e f é contínua em $A = [a, b]$, então, pelo teorema de Weierstrass, f possui extremos globais em $A = [a, b]$.

Se um extremo global está no interior de A, isto é, se um extremo está no intervalo aberto (a, b) e se f é diferenciável em (a, b), então, pela regra de Fermat, este extremo deve ser um ponto crítico de f, isto é, ele deve anular a derivada de f.

Nesta situação ideal, os candidatos a extremos globais são os pontos críticos de f em (a, b), o ponto a e o ponto b. Para saber quem é ponto de máximo global e quem é ponto de mínimo global, basta avaliar a função f nos candidatos.

O problema da caixa se enquadra nesta situação ideal. Vamos resolvê-lo!

Situação ideal

Se $A = [a, b]$ e f é contínua em $A = [a, b]$, então, pelo teorema de Weierstrass, f possui extremos globais em $A = [a, b]$.

Se um extremo global está no interior de A, isto é, se um extremo está no intervalo aberto (a, b) e se f é diferenciável em (a, b), então, pela regra de Fermat, este extremo deve ser um ponto crítico de f, isto é, ele deve anular a derivada de f.

Nesta situação ideal, os candidatos a extremos globais são os pontos críticos de f em (a, b), o ponto a e o ponto b. Para saber quem é ponto de máximo global e quem é ponto de mínimo global, basta avaliar a função f nos candidatos.

O problema da caixa se enquadra nesta situação ideal. Vamos resolvê-lo!

Situação ideal

Se $A = [a, b]$ e f é contínua em $A = [a, b]$, então, pelo teorema de Weierstrass, f possui extremos globais em $A = [a, b]$.

Se um extremo global está no interior de A, isto é, se um extremo está no intervalo aberto (a, b) e se f é diferenciável em (a, b), então, pela regra de Fermat, este extremo deve ser um ponto crítico de f, isto é, ele deve anular a derivada de f.

Nesta situação ideal, os candidatos a extremos globais são os pontos críticos de f em (a, b), o ponto a e o ponto b. Para saber quem é ponto de máximo global e quem é ponto de mínimo global, basta avaliar a função f nos candidatos.

O problema da caixa se enquadra nesta situação ideal. Vamos resolvê-lo!

Situação ideal

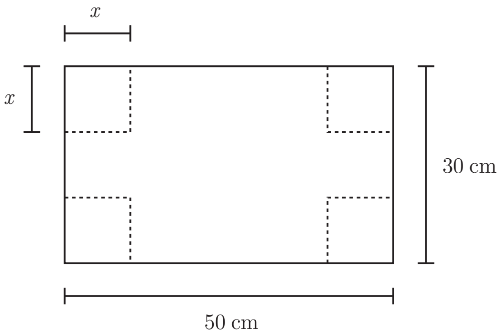
Se $A = [a, b]$ e f é contínua em $A = [a, b]$, então, pelo teorema de Weierstrass, f possui extremos globais em $A = [a, b]$.

Se um extremo global está no interior de A, isto é, se um extremo está no intervalo aberto (a, b) e se f é diferenciável em (a, b), então, pela regra de Fermat, este extremo deve ser um ponto crítico de f, isto é, ele deve anular a derivada de f.

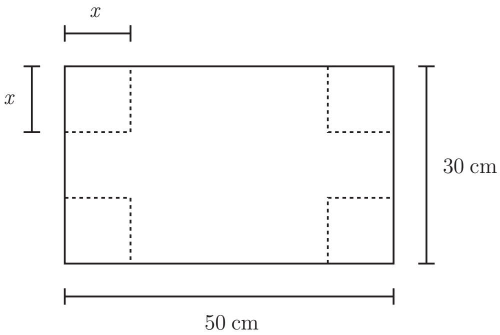
Nesta situação ideal, os candidatos a extremos globais são os pontos críticos de f em (a, b), o ponto a e o ponto b. Para saber quem é ponto de máximo global e quem é ponto de mínimo global, basta avaliar a função f nos candidatos.

O problema da caixa se enquadra nesta situação ideal. Vamos resolvê-lo!

O problema da caixa

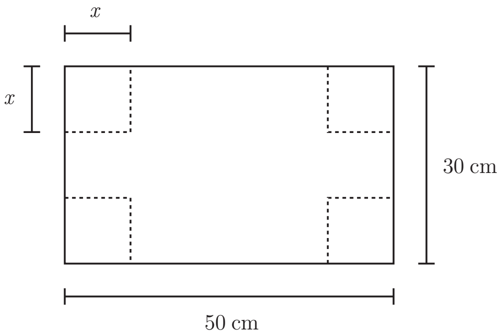


Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.



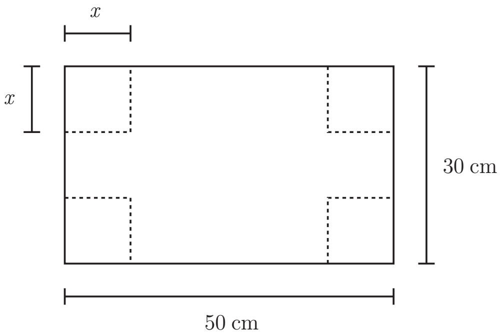
Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.

O problema da caixa



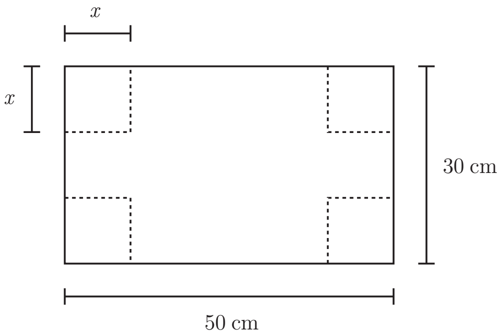
Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.

O problema da caixa



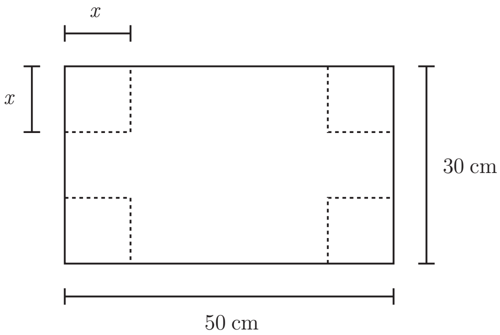
Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.

O problema da caixa



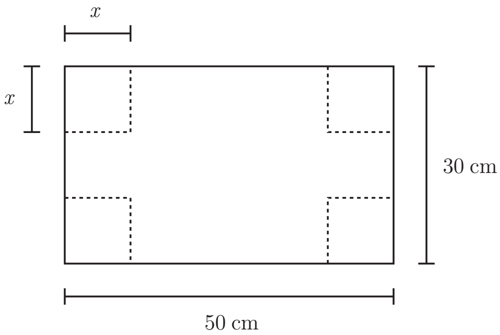
Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.

O problema da caixa



Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.

O problema da caixa



Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots\ \text{cm}^3$.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots\ \text{cm}^3$.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots\ \text{cm}^3$.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.