Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

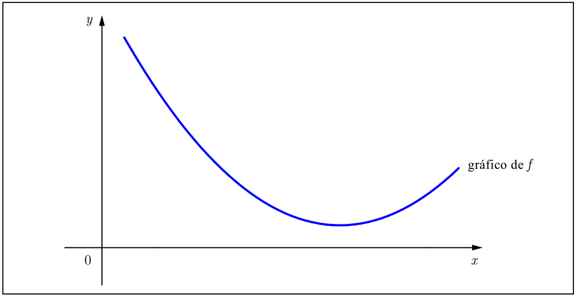
Universidade Federal Fluminense

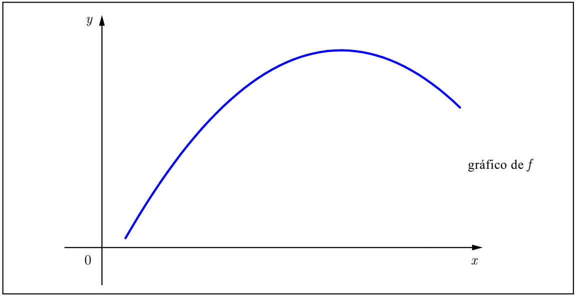
Aula 21

18 de junho de 2009

Convexidade, concavidade e pontos de inflexão

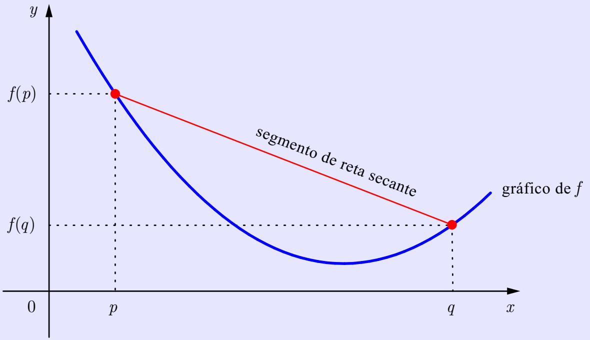
O que estas funções têm de diferente?





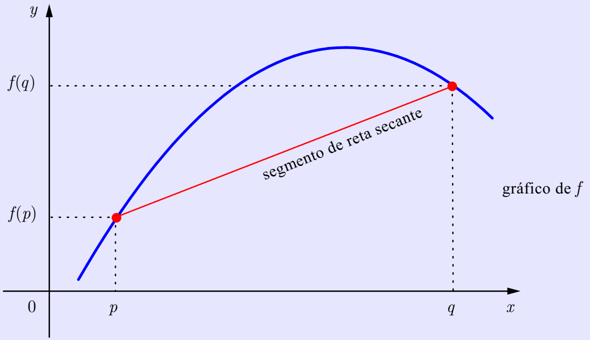
Definição

Dizemos que uma função f definida em um intervalo I é convexa (ou côncava para cima), se o segmento de reta secante que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$ sempre está *acima* ou *coincide* com o gráfico de f para qualquer escolha de pontos p e q em I.



Definição

Dizemos que uma função f definida em um intervalo I é côncava (ou côncava para baixo), se o segmento de reta secante que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$ sempre está *abaixo* ou *coincide* com o gráfico de f para qualquer escolha de pontos p e q em I.



Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas em I.

(1) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para cima no intervalo I.

(2) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para baixo no intervalo I.

Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas em I.

(1) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para cima no intervalo I.

(2) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para baixo no intervalo I.

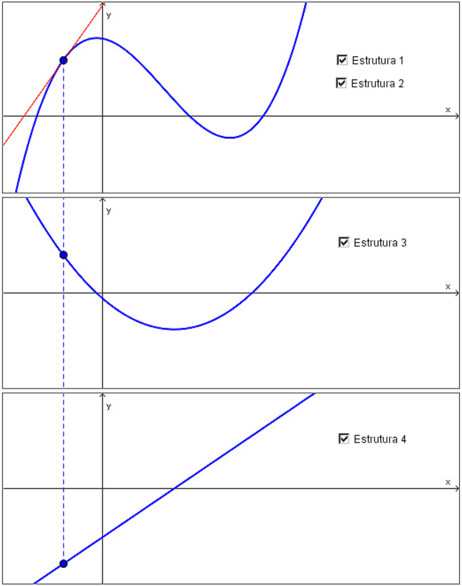
Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas em I.

(1) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para cima no intervalo I.

(2) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para baixo no intervalo I.

Justificativa



Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

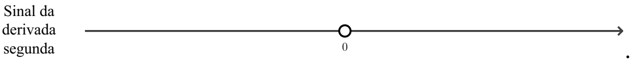
Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



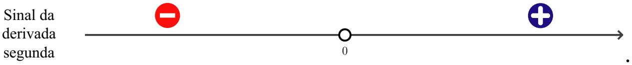
Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9\,x.$$

Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

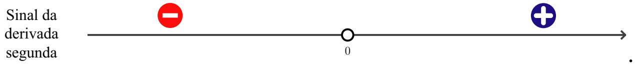


Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

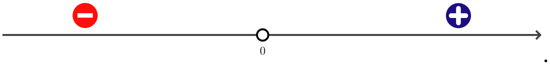


Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Sinal da derivada segunda



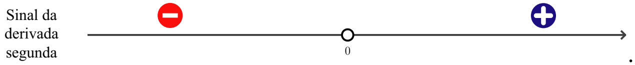
Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

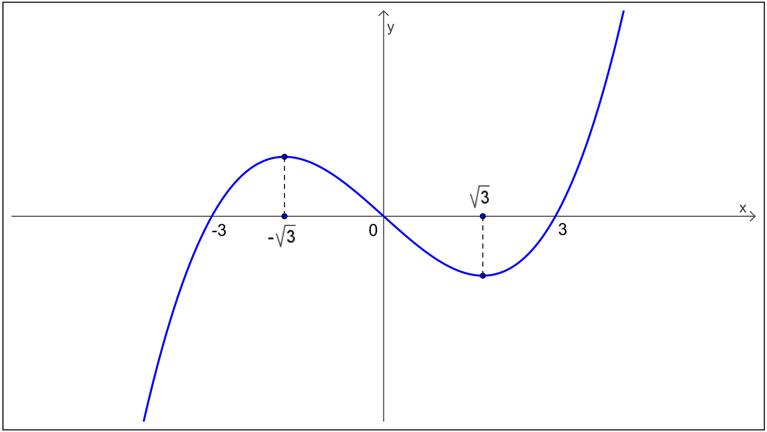
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

$p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.



Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.

Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\, e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\, e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\, e^x = (x+2)\, e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\, e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x + 1)\, e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x + 1)\, e^x = (x + 2)\, e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.

Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

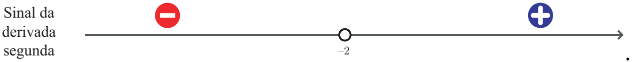
Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

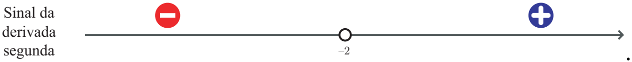
Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Seja $y = f(x) = x\, e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\, e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\, e^x = (x+2)\, e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



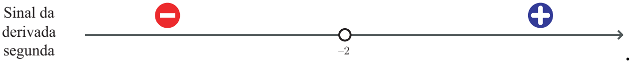
.

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\, e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\, e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\, e^x = (x+2)\, e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

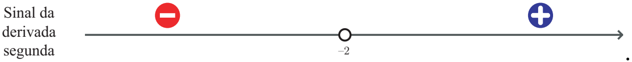


Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Classificando pontos críticos usando a derivada segunda

O teste da derivada segunda

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$, A um subconjunto do domínio D e p é um ponto crítico de f no interior de A. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas.

(1) Se $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local de f em A.

(2) Se $f''(p) < 0$, então p é ponto de máximo local de f em A.

O teste da derivada segunda

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$, A um subconjunto do domínio D e p é um ponto crítico de f no interior de A. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas.

(1) Se $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local de f em A.

(2) Se $f''(p) < 0$, então p é ponto de máximo local de f em A.

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$, A um subconjunto do domínio D e p é um ponto crítico de f no interior de A. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas.

(1) Se $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local de f em A.

(2) Se $f''(p) < 0$, então p é ponto de máximo local de f em A.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\,\sqrt{3} < 0,$$

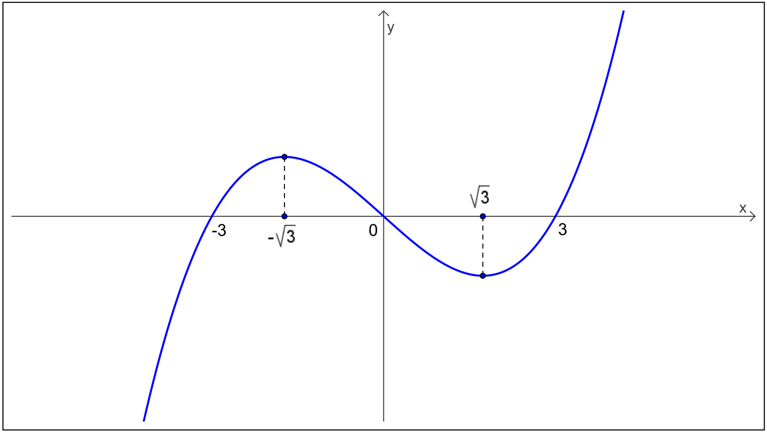
segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\,\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo: $y = f(x) = x^3 - 9\,x$, $A = \mathbb{R}$

A função f possui apenas extremos locais em A: $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local e $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em A.



Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x + 2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1 + 2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

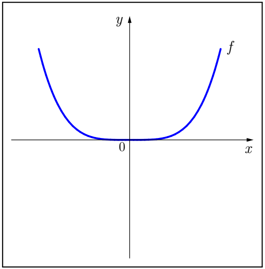
Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

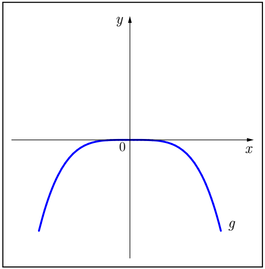
segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Cuidado!

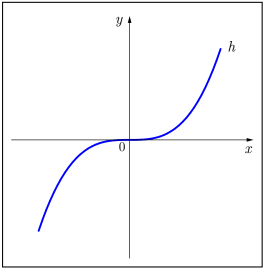
Se $f''(p) = 0$, nada podemos afirmar sobre o ponto p:
ele pode ser um ponto de mínimo local, um ponto de máximo local
ou um ponto de sela.



$f(x) = +x^4$



$g(x) = -x^4$



$h(x) = +x^3$

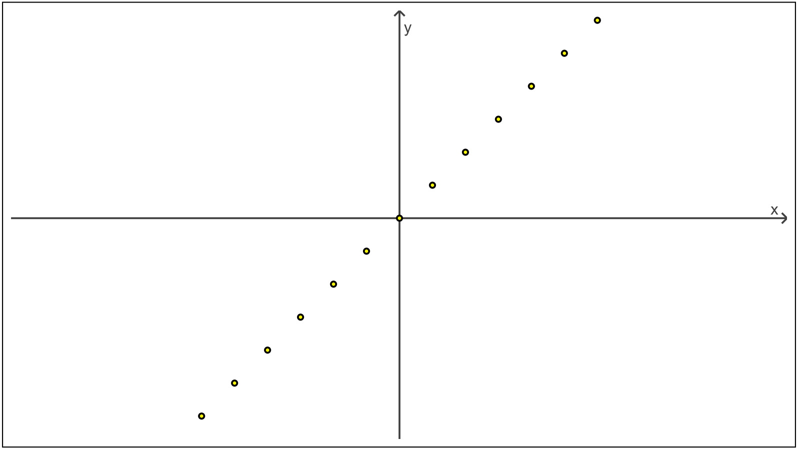
Como fazer um bom esboço do gráfico de uma função?

Tente fazer um esboço do gráfico da função

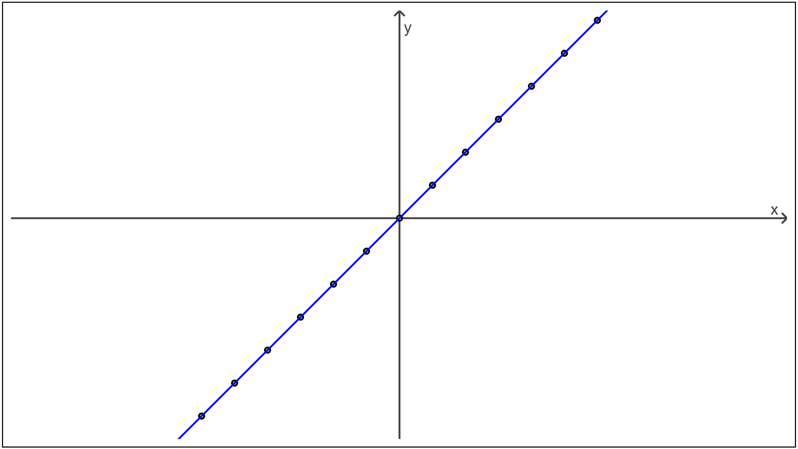
$$y = f(x) = x\,e^x.$$

Faça cada gráfico em um sistema de eixos coordenados diferente.
Use o que quiser, inclusive a sua calculadora!

Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!