Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 23

25 de junho de 2009

Integrais indefinidas

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \text{sen}(x) + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \text{sen}(x) + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) =$ $\operatorname{sen}(x) + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \operatorname{sen}(x) + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \operatorname{sen}(x) + C$, com C uma constante real.

Notação: $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \operatorname{sen}(x) + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com C uma constante real.

Notação: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com C uma constante real.

Notação: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com C uma constante real.

Notação: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com C uma constante real.

Notação: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

Escrevemos $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ se $\dfrac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

Exemplo

Se $k \neq -1$, então $\displaystyle\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$

Exemplo

Se $k \neq -1$, então $\displaystyle\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$.

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\dfrac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\dfrac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\dfrac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\dfrac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\dfrac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\dfrac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C.$$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.

- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + C$.

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + C.$

- $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$.

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)\,dx = -\operatorname{cossec}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)\,dx = -\operatorname{cossec}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \text{cossec}^2(x)\,dx = -\text{cotg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \text{cossec}(x)\,\text{cotg}(x)\,dx = -\text{cossec}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)\,dx = -\operatorname{cossec}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\, dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\, dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\, dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)\, dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\,\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}(x)\operatorname{cotgh}(x)\,dx = -\operatorname{cossech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}(x)\operatorname{cotgh}(x)\,dx = -\operatorname{cossech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}(x)\operatorname{cotgh}(x)\,dx = -\operatorname{cossech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \text{cossech}^2(x)\,dx = -\text{cotgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \text{cossech}(x)\ \text{cotgh}(x)\,dx = -\text{cossech}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arccos}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctg}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$$
- $$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$$
- $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$

Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$
- $\int [c \cdot f(x)]\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$, onde c é uma constante.

Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$

- $\displaystyle\int [c \cdot f(x)]\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$, onde c é uma constante.

Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

- $\displaystyle\int [c \cdot f(x)]\ dx = c \cdot \int f(x)\,dx$, onde c é uma constante.

Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

- $\displaystyle\int [c \cdot f(x)]\ dx = c \cdot \int f(x)\,dx$, onde c é uma constante.

Exercício

$$\text{Calcule} \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right) dx = \int x^{2/3}\, dx - \int 2\, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

$$\text{Calcule} \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right) dx = \int x^{2/3}\, dx - \int 2\, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule} \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right) dx = \int x^{2/3}\, dx - \int 2\, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule} \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right) dx = \int x^{2/3}\, dx - \int 2\, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule } \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right) \, dx = \int x^{2/3} \, dx - \int 2 \, dx \\ &= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\ &= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C. \end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule} \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right)\, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right)\, dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right)\, dx = \int x^{2/3}\, dx - \int 2\, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule} \int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right) \, dx = \int x^{2/3} \, dx - \int 2 \, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

Exercício

Calcule $\displaystyle\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right)\, dx$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right)\, dx &= \int \left(x^{2/3} - 2 \right)\, dx = \int x^{2/3}\, dx - \int 2\, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

Exercício

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\ &= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x)+C.\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\ &= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x)+C.\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule } \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\
&= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.
\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule } \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx$$

$$= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$$

Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\
&= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x)+C.
\end{aligned}$$

Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\
&= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.
\end{aligned}$$

$$\text{Calcule } \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx\\ &= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x)+C.\end{aligned}$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\, x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\, x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Interpretação geométrica