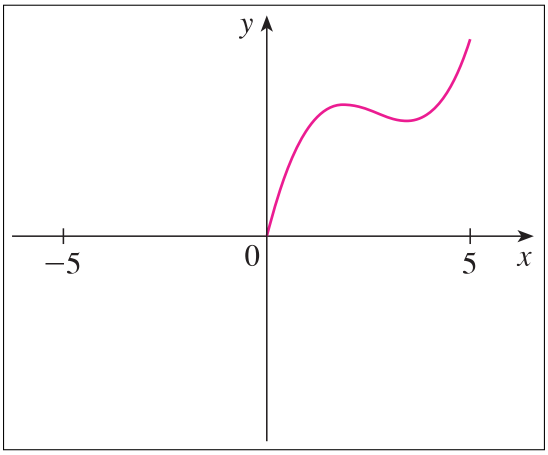
GMA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA	**LISTA DE EXERCÍCIOS** **Cálculo I –A–** **Humberto José Bortolossi** **http://www.professores.uff.br/hjbortol/**	**03**

Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição e inversão

[01] (a) Se o ponto $(5, 3)$ estiver no gráfico de uma função par, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

(b) Se o ponto $(5, 3)$ estiver no gráfico de uma função ímpar, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

[02] Uma função tem o domínio $[-5, 5]$ e uma parte de seu gráfico é mostrada na figura a seguir.



(a) Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função par.

(b) Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função ímpar.

[03] Para cada item a seguir, determine se f é par, ímpar, nenhum dos dois ou os dois ao mesmo tempo.

(a) $y = f(x) = x^{-2}$,

(b) $y = f(x) = x^{-3}$,

(c) $y = f(x) = x^2 + x$,

(d) $y = f(x) = x^4 - 4\,x^2$,

(e) $y = f(x) = x^3 - x$,

(f) $y = f(x) = 0$,

(g) $y = f(x) = 1$,

(h) $y = f(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 + 1$.

[04] Verdadeiro ou falso? Se f é uma função par, então f *não é* uma função ímpar. Justifique sua resposta!

[05] Se $f(x) = 3x^2 + 2$ e $g(x) = \dfrac{1}{3x+2}$, determine:

(a) $h(x) = (f + g)(x)$,

(b) $h(x) = (f(x))^{-1}$,

(c) $h(x) = (f \cdot g)(x)$,

(d) $h(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$,

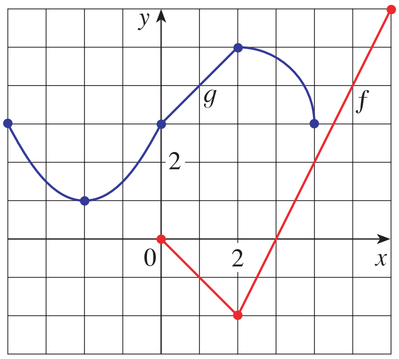
(e) $h(x) = \left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$,

(f) $h(x) = (f \circ g)(x)$.

[06] Seja $f(x) = \dfrac{3-x}{x}$. Determine:

(a) $h(x) = f\left(x^2\right) - (f(x))^2$, (b) $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{f(x)}$, (c) $h(x) = (f \circ f)(x)$.

[07] Use os gráficos de f e g dados na figura abaixo para determinar o valor de cada uma das expressões ou explique por que elas não estão definidas.



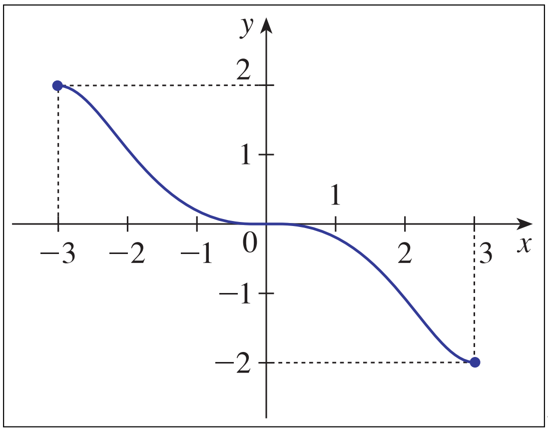
(a) $f(g(2))$, (c) $(f \circ g)(0)$, (e) $(g \circ g)(-2)$,

(b) $g(f(0))$, (d) $(g \circ f)(6)$, (f) $(f \circ f)(4)$.

[08] Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Se g é uma função par, então $h = f \circ g$ também é uma função par?

[09] Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Se g é uma função ímpar, então $h = f \circ g$ também é uma função ímpar?

[10] Considere a função $f\colon [-3, 3] \to [-2, 2]$ cujo gráfico é apresentado na figura abaixo.

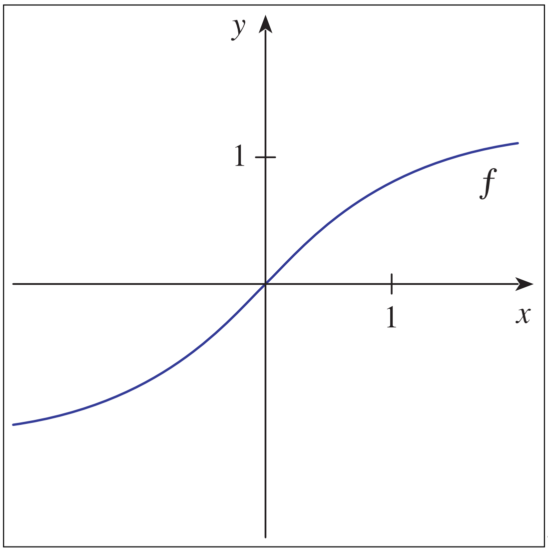


(a) A função f é inversível? Em caso afirmativo, qual é o domínio e o contradomínio da inversa f^{-1}?

(b) Use o gráfico para estimar o valor de $f^{-1}(1)$.

[11] A fórmula $C = 5\,(F - 32)/9$, com $F \geq -459.67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula a função inversa e interprete-a. Qual é o domínio da função inversa?

[12] Use o gráfico da função f dado na figura a seguir para esboçar o gráfico da função inversa f^{-1}.



.

[13] Para cada uma das funções abaixo, escreva $h(x) = (f \circ g)(x)$, com f e g funções diferentes da função identidade.

(a) $h(x) = (x^3 + 4\,x)^7$,

(b) $h(x) = (x^2 - x + 1)^3$,

(c) $h(x) = \sqrt[4]{1 + 2\,x + x^3}$,

(d) $h(x) = (1 + x^4)^{2/3}$,

(e) $h(x) = \cos(a^3 + x^3)$,

(f) $h(x) = a^3 + \cos^3(x)$,

(g) $h(x) = e^{x \cos(x)}$,

(h) $h(x) = \operatorname{tg}(\cos(x))$,

(i) $h(x) = 1/(x^4 + 1)^3$,

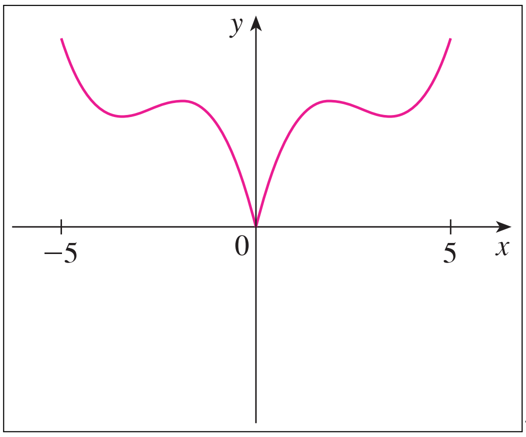
(j) $h(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}(x)}$.

[14] Usando as propriedades das funções exponencial e logarítmica, simplifique as seguintes expressões: $a = e^{2\,\ln(x)}$ para $x > 0$, $b = e^{x\,\ln(2)}$ para $x \in \mathbb{R}$, $c = e^{x\,\ln(x)}$ para $x > 0$ e $d = e^{[\ln(e^x + x)]/x}$ para $x > 0$.

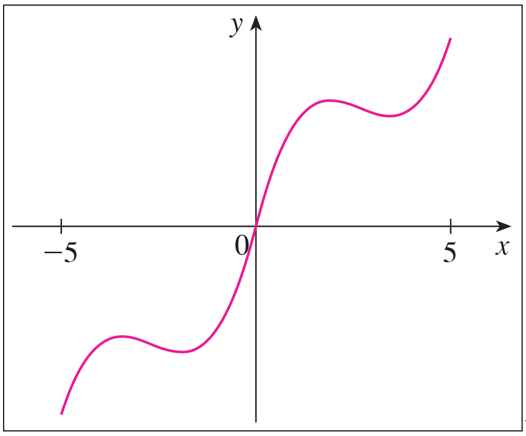
Respostas dos Exercícios

[01] (a) $(-5, 3)$, (b) $(-5, -3)$.

[02] (a) Sabendo que f é uma função par, o gráfico de f fica assim:



(b) Sabendo que f é uma função ímpar, o gráfico de f fica assim:



[03] (a) f é par, (b) f é ímpar, (c) f não é par e nem ímpar, (d) f é par, (e) f é ímpar, (f) f é par e ímpar, (g) f é par, (h) f não é par e nem ímpar.

[04] Falso! Como contra-exemplo, considere a função nula $y = f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que f é par e ímpar ao mesmo tempo.

[05] (a) $y = h(x) = (9x^3 + 6x^2 + 6x + 5)/(3x + 2)$, com $D_h = \mathbb{R} - \{-2/3\}$.

(b) $y = h(x) = 1/(3x^2 + 2)$, com $D_h = \mathbb{R}$.

(c) $y = h(x) = (3x^2 + 2)/(3x + 2)$, com $D_h = \mathbb{R} - \{-2/3\}$.

(d) $y = h(x) = 9x^3 + 6x^2 + 6x + 4$, com $D_h = \mathbb{R} - \{-2/3\}$.

(e) $y = h(x) = 1/(9x^3 + 6x^2 + 6x + 4)$, com $D_h = \mathbb{R} - \{-2/3\}$.

(f) $y = h(x) = (18x^2 + 24x + 11)/(9x^2 + 12x + 4)$, com $D_h = \mathbb{R} - \{-2/3\}$.

[06] (a) $y = h(x) = (6x - 2x^2 - 6)/(x^2)$, com $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) $y = h(x) = (9x - 3x^2 - 3)/(3 - x)$, com $D_h = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

(c) $y = h(x) = (4x - 3)/(3 - x)$, com $D_h = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

[07] (a) 4, (b) 3, (c) 0, (d) não está definida, pois $f(6) = 6$ não está no domínio de g, (e) 4, (f) -2.

[08] Sim, pois $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) \overset{(*)}{=} f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que, em $(*)$, usamos o fato de que g é uma função par.

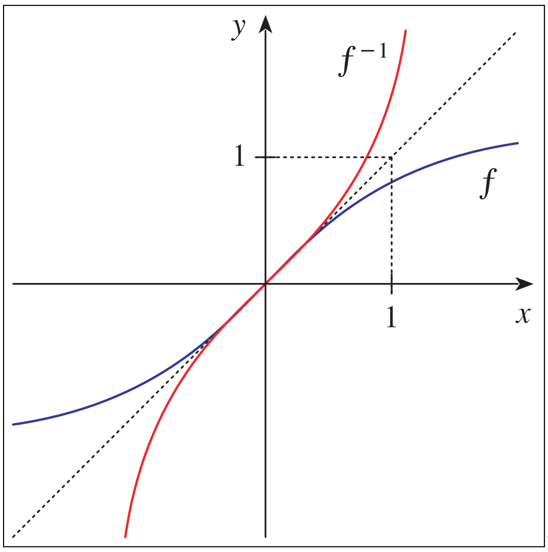
[09] Não! Como contra-exemplo, considere $y = f(x) = x + 1$ e $y = g(x) = x^3$. A função g é ímpar, mas $y = h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = x^3 + 1$ não é uma função ímpar.

[10] (a) Sim, pois ela é bijetiva, isto é, ela é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo. O domínio de f^{-1} é o conjunto $[-2, 2]$ e o seu contradomínio é o conjunto $[-3, 3]$.

(b) $f^{-1}(1)$ está próximo de -2.

[11] $F = 9\,C/5 + 32$; esta fórmula expressa a temperatura em graus Fahrenheit como uma função da temperatura em graus Celsius; o domínio da função inversa é o intervalo $[-273.15, +\infty)$.

[12] Um esboço do gráfico da função inversa f^{-1} de f é dado na figura a seguir.



.

[13] (a) $f(x) = x^7$ e $g(x) = x^3 + 4\,x$,

(b) $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 - x + 1$,

(c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ e $g(x) = 1 + 2\,x + x^3$,

(d) $f(x) = x^{2/3}$ e $g(x) = 1 + x^4$,

(e) $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = a^3 + x^3$,

(f) $f(x) = a^3 + x^3$ e $g(x) = \cos(x)$,

(g) $f(x) = e^x$ e $g(x) = x\,\cos(x)$,

(h) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$,

(i) $f(x) = 1/x^3$ e $g(x) = x^4 + 1$,

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = 1 + \operatorname{tg}(x)$.

[14] $a = x^2$, $b = 2^x$, $c = x^x$ e $d = (e^x + x)^{1/x}$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 26/03/2009.