DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I –A–
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

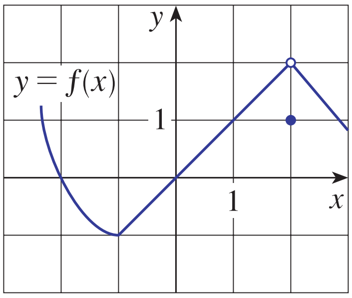
05

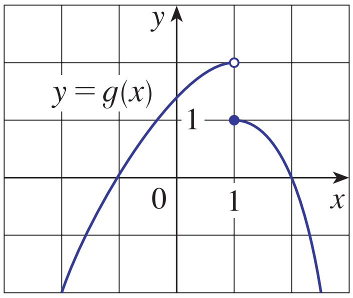
Operações com limites, o teorema do confronto e o teorema do anulamento

[01] Os gráficos das funções f e g são dados abaixo. Use-os pra calcular cada limite, caso ele exista.

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$, (b) $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$, (c) $\lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)]$,

(d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{g(x)}{f(x)}$, (e) $\lim_{x\to 2}[x^3\cdot f(x)]$, (f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$.





.

[02] Considere as funções

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2} \qquad \text{e} \qquad g(x)=x+3.$$

(a) As funções f e g são diferentes. Por quê?

(b) Apesar de f e g serem diferentes, ainda é verdade que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3).$$

Por quê?

[03] Calcule cada limite abaixo, se ele existir.

(a) $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$, (b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$, (c) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$, (c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

[04] Uma função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade: $1+4\,x-x^2\leq f(x)\leq x^2-4\,x+9$ para todo $x\neq 2$. Calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$.

[05] Prove que: (a) $\lim_{x\to 0} x^4\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$ e (b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\,e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\right)=0$.

[06] Seja

$$g(x)=\begin{cases}-x, & \text{se } x\leq 1,\\ 1-x^2, & \text{se } -1<x<1,\\ x-1, & \text{se } x>1.\end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico de g e calcule cada um dos limites dados a seguir, se ele existir.

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$, (b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, (c) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, (d) $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x)$,

(e) $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$, (f) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.

[07] Mostre, por meio de um exemplo, que $\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to p} f(x)$ e nem $\lim_{x\to p} g(x)$ existam.

[08] Mostre, por meio de um exemplo, que $\lim_{x\to p}[f(x)\cdot g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to p} f(x)$ e nem $\lim_{x\to p} g(x)$ existam.

Respostas dos Exercícios

[01] (a) 2, (b) não existe pois $\lim_{x\to 1^+}[f(x)+g(x)] = 2 \neq 3 = \lim_{x\to 1^-}[f(x)+g(x)]$, (c) 0, (d) 0, (e) 16, (f) 2.

[02] (a) As funções f e g são diferentes, pois possuem domínios diferentes: f está definida em $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, enquanto que g está definida em $D_g = \mathbb{R}$.

(b) Apesar das funções f e g serem diferentes, para valores de $x \neq 2$, vale que $f(x) = g(x)$, pois

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(x-2)\cdot(x+3)}{x-2} = x+3 = g(x).$$

Como no cálculo de $\lim_{x\to 2}[(x^2+x-6)/(x-2)]$ devemos considerar valores de x próximos de 2, mas diferentes de 2, podemos substituir $(x^2+x-6)/(x-2)$ por $x+3$.

[03] (a) $\sqrt{2}/4$, (b) 32, (c) 108, (d) 3.

[04] 5.

[05] (a) Sejam $f(x) = x^4$ e $g(x) = \cos(2/x)$. Temos que g é uma função limitada, pois

$$-1 \leq \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +1, \qquad \text{para todo } x \neq 0.$$

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

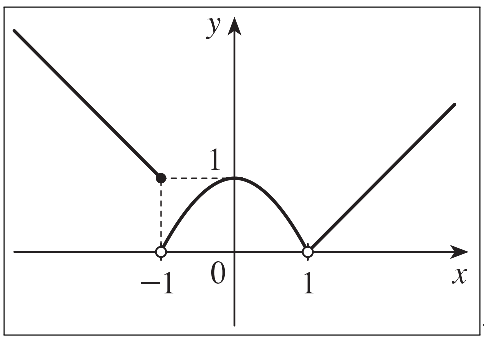
(b) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$. Como $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$ para todo $x \neq 0$ e como a função exponencial de base e é crescente, temos que

$$e^{-1} \leq e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq e^{+1}, \qquad \text{para todo } x \neq 0,$$

isto é, $g(x) = e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\right) = 0.$$

[06] O esboço do gráfico de g é dado na figura a seguir.



(a) 0, (b) 0, (c) 1, (d) 1, (e) 0, (f) não existe, pois $\lim_{x\to -1^-} g(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to -1^+} g(x)$.

[07] Sejam $f(x) = +|x|/x$ e $g(x) = -|x|/x$. Temos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} g(x)$ não existem, mas

$$\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 0} \left[\left(+\frac{|x|}{x} \right) + \left(-\frac{|x|}{x} \right) \right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

existe.

[08] Sejam $f(x) = +|x|/x$ e $g(x) = +|x|/x$. Temos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} g(x)$ não existem, mas

$$\lim_{x\to 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to 0} \left[\left(+\frac{|x|}{x} \right) \cdot \left(+\frac{|x|}{x} \right) \right] = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

existe.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 14/04/2009.