GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I –A–
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

08

Continuidade e o Teorema do Valor Intermediário

[01] Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3} [2\,f(x) - g(x)] = 4$. Calcule $g(3)$.

[02] Explique porque cada uma das funções abaixo é descontínua no ponto indicado.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 2, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ no ponto $p = 1$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & \text{se } x \neq -1, \\ 2, & \text{se } x = -1, \end{cases}$ no ponto $p = -1$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2\,x-8}{x-4}, & \text{se } x \neq 4, \\ 3, & \text{se } x = 4, \end{cases}$ no ponto $p = 4$.

(d) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \leq 2, \\ x^2 - 2\,x, & \text{se } x = 2, \end{cases}$ no ponto $p = 2$.

[03] Use a continuidade da função seno para calcular $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen}(x))$.

[04] Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x < 3, \\ 5-x, & \text{se } x \geq 3, \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

[05] Verifique se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que a função $f(x) = \begin{cases} 1 + a\,x, & \text{se } x \leq 0, \\ x^4 + 2\,a, & \text{se } x > 0, \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$.

[06] Determine um valor diferente de zero para a constante c de modo que a função

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(c\cdot x)}{x}, & \text{se } x < 0, \\ 3\cdot x + c^2, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

seja contínua ponto $p = 0$. Justifique a sua resposta!

[07] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $x^2 \cdot \cos^2(x) \leq f(x) \leq x \cdot \operatorname{sen}(x)$, $\forall x \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Mostre que f é contínua em $x = 0$.

[08] (a) Mostre que a função $f(x) = x^3 + x - 1$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.
(b) Mostre que a função $f(x) = x^3 + 3\,x - 5$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[1, 2]$.
(c) Mostre que a função $f(x) = 1 + x\cos(\pi\,x/2)$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[1/2, 3/2]$.

[09] Dê um exemplo de uma função tal que que em dois pontos distintos $x = a$ e $x = b$ a função tem sinais contrários, f não é contínua no intervalo $[a, b]$ e f possui pelo menos uma raiz no intervalo $[a, b]$.

[10] Dê um exemplo de uma função tal que que em dois pontos distintos $x = a$ e $x = b$ a função tem sinais contrários, f não é contínua no intervalo $[a, b]$ e f não possui raiz no intervalo $[a, b]$.

[11] Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x = a$ para o ponto $x = b$, existirá obrigatoriamente um ponto entre a e b onde a função f se anula? Justifique sua resposta.

[12] Mostre que os gráficos de $y = f(x) = 1$ e $y = g(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg}(x)$ têm pelo menos um ponto de interseção com abscissa no intervalo $(-\pi/2, +\pi/2)$.

Respostas dos Exercícios

[01] 6.

[02] (a) A função não é contínua em $p = 1$, pois não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, uma vez que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

(b) A função não é contínua em $p = -1$, pois

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -2 \neq 2 = f(-1).$$

(c) A função não é contínua em $p = 4$, pois

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-2\,x-8}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+2)\,(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+2) = 6 \neq 3 = f(4).$$

(d) A função não é contínua em $p = -$, pois não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, uma vez que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-2\,x) = 0 \neq -1 = \lim_{x\to 2^-}(1-x) = \lim_{x\to 2^-} f(x).$$

[03] 0.

[04] Observe que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(5-x) = 2$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-1) = 2$ e $f(3) = 5-3 = 2$. Assim,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2 = f(3).$$

Isto mostra que f é contínua em $p = 3$. A função f também é contínua em pontos $p < 3$, pois neste caso $f(x) = x-1$ é contínua como diferença de funções contínuas. O mesmo argumento mostra que f é contínua em pontos $p > 3$.

[05] Existe: $a = 1/2$.

[06] Para que f seja contínua em $p = 0$, devemos ter $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, isto é,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(c\cdot x)}{x} = 3\cdot 0 + c^2 = c^2.$$

Mas, se $c \neq 0$, então

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(c\cdot x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[c\cdot \frac{\operatorname{tg}(c\cdot x)}{c\cdot x}\right] = c\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(c\cdot x)}{c\cdot x} = c\cdot 1 = c.$$

Sendo assim, $c = c^2$ e, como $c \neq 0$, segue-se que $c = 1$.

[07] Substituindo $x = 0$, vemos que $0^2\cdot\cos(0) \leq f(0) \leq 0\cdot\operatorname{sen}(0)$, isto é, $0 \leq f(0) \leq 0$. Sendo assim, concluímos que $f(0) = 0$. Agora

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cdot\cos(x)) = 0\cdot\cos(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{sen}(x)) = 0\cdot\operatorname{sen}(0) = 0.$$

Pelo teorema do confronto, vemos então que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Como $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, segue-se que f é contínua em $x = 0$.

[08] (a) A função $f(x) = x^3 + x - 1$ é contínua no intervalo $[0, 1]$ (pois ela é soma e produto de funções contínuas). Como $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, segue-se pelo teorema do valor intermediário que f possui pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

(b) A função $f(x) = x^3 + 3\,x - 5$ é contínua no intervalo $[1, 2]$ (pois ela é soma e produto de funções contínuas). Como $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 9 > 0$, segue-se pelo teorema do valor intermediário que f possui pelo menos uma raiz no intervalo $[1, 2]$.

(c) A função $f(x) = 1 + x\cos(\pi\,x/2)$ é contínua no intervalo $[1/2, 2/2]$ (pois ela é soma, produto e composição de funções contínuas). Como $f(1/2) = 1 + \sqrt{2}/4 > 0$ e $f(3/2) = 1 - 3\sqrt{2}/4 < 0$, segue-se pelo teorema do valor intermediário que f possui pelo menos uma raiz no intervalo $[1/2, 3/2]$.

[09] A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ no intervalo $[a, b] = [-1, 1]$. Note que $x = 0$ é raiz de f.

[10] A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ no intervalo $[a, b] = [-1, 1]$.

[11] A resposta é não. Como contra-exemplo, considere a função do exercício anterior.

[12] Seja $h(x) = g(x) - f(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg}(x) - 1$. Note que h é uma função contínua no intervalo $[0, \pi/3]$, pois h é soma e produto de funções contínuas. Agora

$$h(0) = 0^2 \cdot \operatorname{tg}(0) - 1 = -1 < 0 \qquad \text{e} \qquad h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0.$$

Segue-se então pelo teorema do valor intermediário que existe $c \in [0, \pi/3]$ tal que $h(c) = 0$. Mas $h(c) = g(c) - f(c)$. Assim, se $h(c) = 0$, então $g(c) - f(c) = 0$, isto é, $g(c) = f(c)$. Como o intervalo $[0, \pi/3]$ está contido no intervalo $(-\pi/2, +\pi/2)$, isto mostra que os gráficos de $y = f(x) = 1$ e $y = g(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg}(x)$ têm pelo menos um ponto de interseção com abscissa no intervalo $(-\pi/2, +\pi/2)$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 29/04/2009.