LISTA DE EXERCÍCIOS

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

09

Definição de derivada, retas tangentes, taxas de variação e derivadas laterais

[01] O custo (em reais) de produzir x unidades de uma determinada mercadoria é dada pela função $f(x) = 5000 + 10\,x + 0.05\,x^2$.

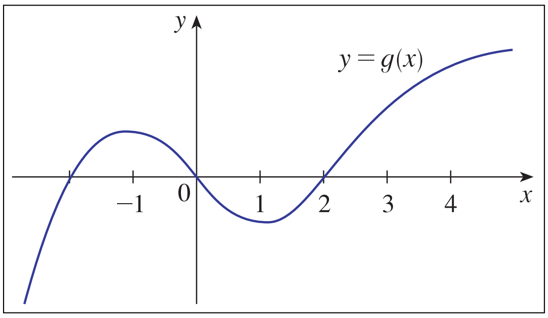
(a) Encontre a taxa de variação média de f em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando:

(1) de $x = 100$ a $x = 105$ e

(2) de $x = 100$ a $x = 101$.

(b) Encontre a taxa de variação instantânea de f em relação a x quando $x = 100$.

[02] Considere a função g cujo gráfico é dado abaixo.



Disponha os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio: 0, $g'(-2)$, $g'(0)$, $g'(2)$ e $g'(4)$.

[03] Se a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em $(p, f(p)) = (4, 3)$ passa pelo ponto $(0, 2)$, calcule $f(4)$ e $f'(4)$.

[04] Quantas retas tangentes ao gráfico de $y = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x + 1$? Determine as equações dessas tangentes.

[05] Esboce o gráfico de uma função f que satisfaz as seguintes condições: $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

[06] Usando a definição de derivada, calcule $f'(-1)$ para cada uma das funções dadas a seguir.

(a) $f(x) = 1 + x - 2\,x^2$, (b) $f(x) = \dfrac{x}{2\,x - 1}$, (c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3 - x}}$.

[07] Cada limite abaixo representa a derivada de alguma função f em algum ponto p. Estabeleça f e p em cada caso.

(a) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$, (b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$, (c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^9 - 1}{x - 1}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 3\pi} \frac{\cos(x) + 1}{x - 3\pi}$, (e) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi/2 + t) - 1}{t}$, (f) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x}$.

[08] O custo y (em R\$) de produção de x kg de ouro provenientes de uma nova mina é descrito por uma função $y = f(x)$. Qual é o significado da derivada $f'(x)$? Qual é a sua unidade?

[09] A quantidade q (em kg) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete a um preço p (em R\$ por kg) é descrita por uma função $q = f(p)$.

(a) Qual é o significado da derivada $f'(8)$? Qual é a sua unidade?

(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

[10] A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{2}, & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$ é diferenciável em $p = 1$? Em caso afirmativo, calcule $f'(1)$.

[11] Calcule, caso exista, a derivada da função $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ no ponto $p = 0$.

Respostas dos Exercícios

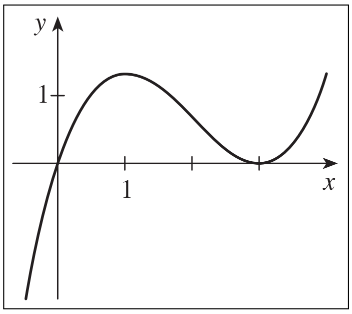
[01] (a) (1) 20.25, (2) 20.05. (b) 20.00.

[02] Note que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em $x = 4$ é menor que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em $x = 2$. Estas duas inclinações, por sua vez, são menores do que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em $x = -2$. $g'(0)$ é o único valor negativo. Sendo assim, $g'(0) < 0 < g'(4) < g'(2) < g'(-2)$.

[03] $f(4) = 3$ e $f'(4) = 1/4$.

[04] Duas retas tangentes: $y = 6x - 2$ e $y = 6x + 2$

[05] O esboço do gráfico é apresentado na figura abaixo.



[06] (a) $f'(-1) = +5$, (b) $f'(-1) = -1/9$, (c) $f'(-1) = +1/8$.

[07] (a) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 1$, (b) $f(x) = x^3$ em $p = 2$, (c) $f(x) = x^9$ em $p = 1$, (d) $f(x) = \cos(x)$ em $p = 3\pi$, (e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ em $p = \pi/2$, (f) $f(x) = 3^x$ em $p = 0$.

[08] $f'(x)$ é a taxa de variação do custo de produção com relação a quantidade de kg de ouro sendo produzido. Sua unidade é R\$/kg.

[09] (a) $f'(8)$ é a taxa de variação da quantidade de café vendido com relação ao preço por kg quando o preço é R\$ 8.00 por kg. A unidade de $f'(8)$ é kg/(R\$/kg).

(b) $f'(8)$ é negativo, uma vez que a quantidade de café vendido deve diminuir quando o preço cobrado por ele aumentar. Pessoas, em geral, sentem menos vontade de comprar um produto quando o seu preço aumenta.

[10] A função f é diferenciável no ponto $p = 1$ e $f'(1) = -1/2$.

[11] $f'(0) = 0$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 05/05/2009.