GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I –A–
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

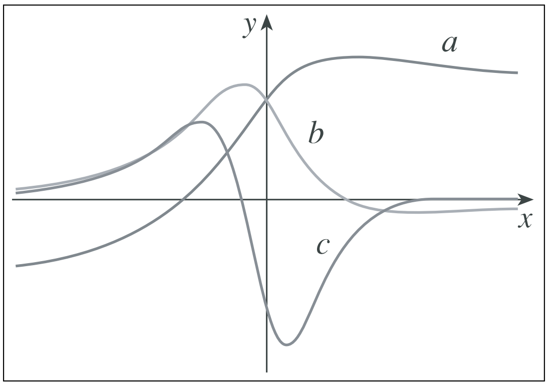
12

Derivadas de ordem superior e o teorema da função inversa

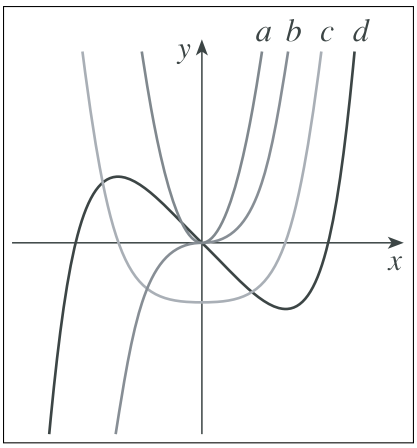
[01] Calcule as derivadas primeira e segunda de cada uma das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x) = x^5 + 6\,x^2 - 7\,x$,
(b) $f(t) = t^8 - 7\,t^6 + 2\,t^4$,
(c) $y = \cos(2\,\theta)$,
(d) $y = \theta\,\text{sen}(\theta)$,
(e) $F(t) = (1 - 7\,t)^6$,
(f) $g(x) = (2\,x + 1)/(x - 1)$,
(g) $h(u) = (1 - 4\,u)/(1 + 3\,u)$,
(h) $H(s) = a\sqrt{s} + b/\sqrt{s}$,
(i) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,
(j) $y = xe^{cx}$,
(k) $y = \text{tg}(3\,t)$,
(l) $h(x) = \text{arctg}(x^2)$.

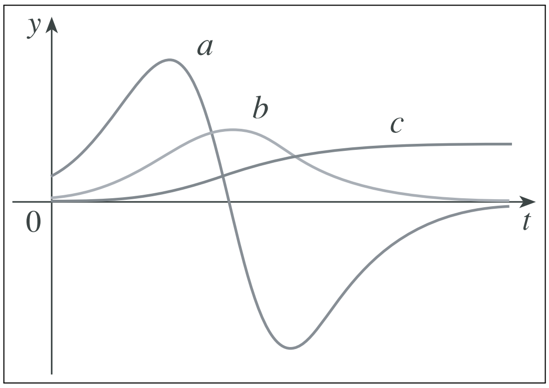
[02] A figura abaixo exibe os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada gráfico.



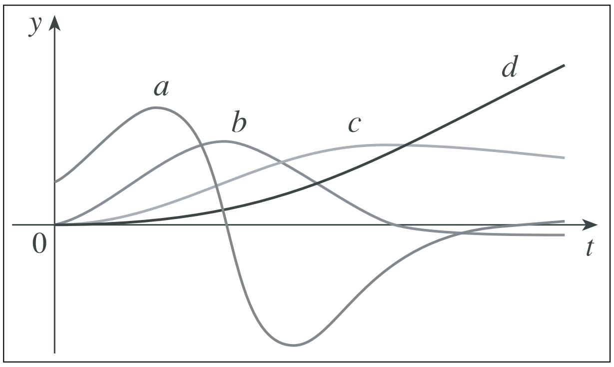
[03] A figura abaixo exibe os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada gráfico.



[04] A figura abaixo exibe o gráfico de três funções que descrevem a posição, a velocidade e a aceleração de um carro em função do tempo. Identifique cada gráfico.



[05] A figura abaixo exibe o gráfico de quatro funções que descrevem a posição, a velocidade, a aceleração e o arranco (*jerk*) de um carro em função do tempo. Identifique cada gráfico.



[06] Se $f(x) = 1/x$, calcule $f^{(n)}(x)$.

[07] Sejam f e g funções de classe C^∞. Calcule a derivada de segunda ordem da função $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

[08] Sejam f e g funções de classe C^∞. Calcule a derivada de segunda ordem da função $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

[09] Calcule as derivadas de ordem 1 de cada uma das funções indicadas abaixo.

(a) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$,

(b) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$,

(c) $y = \operatorname{arcsen}(2\,x + 1)$,

(d) $h(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\operatorname{arcsen}(x)$,

(e) $H(x) = (1 + x^2)\,\operatorname{arctg}(x)$,

(f) $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1 + x^2})$,

(g) $y = x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$,

(h) $y = \operatorname{arctg}(\cos(\theta))$,

[10] Seja f uma função de classe C^∞ inversível. Calcule $(f^{-1})'(5)$, sabendo que $f(4) = 5$ e $f'(4) = 2/3$.

Respostas dos Exercícios

[01] (a) $f'(x) = 5\,x^4 + 12\,x - 7$ e $f''(x) = 20\,x^3 + 12$.

(b) $f'(t) = 8\,t^7 - 42\,t^5 + 8\,t^3$ e $f''(t) = 56\,t^6 - 210\,t^4 + 24\,t^2$.

(c) $y' = -2\,\operatorname{sen}(2\,\theta)$ e $y'' = -4\,\cos(2\,\theta)$.

(d) $y' = \theta\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)$ e $y'' = 2\,\cos(\theta) - \theta\operatorname{sen}(\theta)$.

(e) $F'(t) = -42\,(1 - 7\,t)^5$ e $F''(t) = 1470\,(1 - 7\,t)^4$.

(f) $g'(x) = -3/(x-1)^2$ e $g''(x) = 6/(x-1)^3$.

(g) $h'(u) = -7/(1 + 3\,u)^2$ e $h''(u) = 42/(1 + 3\,u)^3$.

(h) $H'(s) = a\,s^{-1/2}/2 - b\,s^{-3/2}/2$ e $H''(s) = -a\,s^{-3/2}/4 + 3\,b\,s^{-5/2}/4$.

(i) $h'(x) = x/\sqrt{x^2+1}$ e $h''(x) = 1/(x^2+1)^{3/2}$.

(j) $y' = e^{cx}(cx + 1)$ e $y'' = ce^{cx}(cx + 2)$.

(k) $H'(t) = 3\,\sec^2(3\,t)$ e $H''(t) = 18\,\sec^2(3\,t)\,\operatorname{tg}(3\,t)$.

(l) $h'(x) = 2\,x/(1 + x^4)$ e $h''(x) = (2 - 6\,x^4)/(1 + x^4)^2$.

[02] $f = a$, $f' = b$ e $f'' = c$.

[03] $f = d$, $f' = c$, $f'' = b$ e $f''' = a$.

[04] c é a posição, b é a velocidade e a é a aceleração.

[05] d é a posição, c é a velocidade, b é a aceleração e a é o arranco.

[06] $f^{(n)}(x) = (-1)^n\,n!/x^{n+1}$.

[07] $F''(x) = f''(x)\cdot g(x) + 2\cdot f'(x)\cdot g'(x) + f(x)\cdot g''(x)$.

[08] Sabemos, pela regra da cadeia, que $F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$. Derivando novamente, obtemos que

$$F''(x) = f''(g(x))\cdot g'(x)\cdot g'(x) + f'(g(x))\cdot g''(x) = f''(g(x))\cdot (g'(x))^2 + f'(g(x))\cdot g''(x).$$

[09] (a) $y' = 1/(2\sqrt{x}(1+x))$, (b) $y' = 1/(2\sqrt{\operatorname{arctg}(x)}(1+x^2))$, (c) $y' = 1/\sqrt{-x^2-x}$, (d) $h'(x) = 1 - x\operatorname{arcsen}(x)/\sqrt{1-x^2}$, (e) $H'(x) = 1 + 2\,x\operatorname{arctg}(x)$, (f) $y' = 1/(2\,(1+x^2))$, (g) $y' = \arccos(x)$, (h) $y' = -\operatorname{sen}(\theta)/(1+\cos^2(\theta))$.

[10] $(f^{-1})'(5) = 3/2$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 14/05/2009.