GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I –A–
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

14

Aproximações afins e polinômios de Taylor

[01] Encontre a equação da reta que melhor aproxima o gráfico de $y = f(x) = x^{19/3}$ para valores de x próximos de -1. Usando a equação desta reta, encontre um valor aproximado para $(-1.06)^{19/3}$.

[02] Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{35.99}$.

[03] Calcule o polinômio de Taylor de ordem 7 da função $y = f(x) = \cos(x)$ no ponto $p = 0$.

[04] Calcule o polinômio de Taylor de ordem 7 da função $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$ no ponto $p = 0$.

[05] Aproxime $f(x) = e^x$ em $p = 0$ com um polinômio de Taylor de grau três e com um polinômio de grau quatro. A seguir, calcule os valores destas aproximações em $x = 0.2$ e $x = 1.0$ e compare com os valores corretos.

[06] Use o polinômio de Taylor de ordem dois de $f(x) = x^{3/2}$ no ponto $p = 4$ para obter uma aproximação de $(4.2)^{3/2}$.

[07] Seja $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$.

(a) Determine o polinômio de Taylor de grau 7 de $f(x)$ em torno de $x = 0$;

(b) Usando o item anterior, calcule $\operatorname{arctg}(0.3)$ e estime o erro;.

(c) Determine o polinômio de Taylor de grau 14 de $g(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$ em torno de $x = 0$. (Sugestão: use o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$.)

[08] Calcule os polinômios de Taylor de ordem um, dois e três da funções $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ em $p = 0$ e da função $y = g(x) = \ln(x)$ em $p = 1$. A seguir, calcule os valores destas aproximações em $x = 0.2$ e $x = 1.2$ e compare com os valores corretos.

Respostas dos Exercícios

[01] $y = 19\,x/3 + 16/3$, $(-1.06)^{19/3} \approx -1.38$.

[02] $\sqrt{35.99} \approx 5.9992$.

[03] $\cos(x) \approx p_7(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!$.

[04] $\text{sen}(x) \approx p_7(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$.

[05] $p_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ e $p_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$. $p_3(0.2) = 1.221333333\ldots$, $p_3(1.0) = 2.6666666\ldots$, $p_4(0.2) = 1.2214$ e $p_4(1.0) = 2.70833333\ldots$.

[06] $p_2(x) = 8 + 3\,(x-4) + 3\,(x-4)^2/16$ e $p_2(4.2) = 8.6075$.

[07] (a) $\text{arctg}(x) \approx p_7(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7$, (b) $\text{arctg}(0.3) \approx 0.291454757$, (c) $\text{arctg}(x^2) \approx p_{14}(x) = x^2 - x^6/3 + x^{10}/5 - x^{14}/7$.

[08] Para $f(x) = \sqrt{1+x}$ temos $p_1(x) = 1 + x/2$, $p_2(x) = 1 + x/2 - x^2/8$, $p_3(x) = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16$, $p_1(0.2) = 1.1$, $p_2(0.2) = 1.095$, $p_3(0.2) = 1.0955$. Para $g(x) = \ln(x)$ temos $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = (x-1) - (x-1)^2/2$, $p_3(x) = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3$, $p_1(1.2) = 0.2$, $p_2(1.2) = 0.18$ e $p_3(1.2) = 0.182666666\ldots$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 25/05/2009.