O teorema de Rolle e o teorema do valor médio para derivadas

[01] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Seja f uma função derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

(b) Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

[02] Mostre que a equação $x^3 + 3\,x + 1 = 0$ possui uma única solução real.

[03] Mostre que a função $y = f(x) = 8\,x^3 + 30\,x^2 + 24\,x + 10$ possui uma única raiz real no intervalo $(-3, -2)$.

[04] Para cada um dos casos abaixo, encontre pelo menos um valor de $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

(a) $y = f(x) = x^2+2\,x+1$, com $a = 0$ e $b = 1$.

(b) $y = f(x) = x^{2/3}$, com $a = 0$ e $b = 1$.

(c) $y = f(x) = x + 1/x$, com $a = 1/2$ e $b = 2$.

(c) $y = f(x) = \sqrt{x + 1}$, com $a = 1$ e $b = 3$.

[05] Seja f uma função de classe C^1. Use o teorema do valor médio para mostrar que se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante no intervalo (a, b).

[06] Verdadeiro ou falso? Se f é uma função de classe C^∞ tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in D$, então f é constante em D. Justifique a sua resposta!

[07] Sejam f e g duas funções de classe C^1. Use o teorema do valor médio para mostrar que se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então $f = g + C$ no intervalo (a, b), onde C é uma constante.

[08] Seja f uma função de classe C^1 tal que $f'(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 5$. Mostre que $f(x) = 2\,x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Justifique a sua resposta!

[09] Verdadeiro ou falso? Seja f uma função de classe C^1 tal que $f'(x) = 2$ para todo $x \in (-1, +1) \cup (+2, +3)$ e $f(0) = 5$. Mostre que $f(x) = 2\,x + 5$ para todo $x \in (-1, +1) \cup (+2, +3)$. Justifique a sua resposta!

[10] **(Demonstração do teorema do valor médio a partir do teorema de Rolle)** Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Defina

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

(a) Mostre que g é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

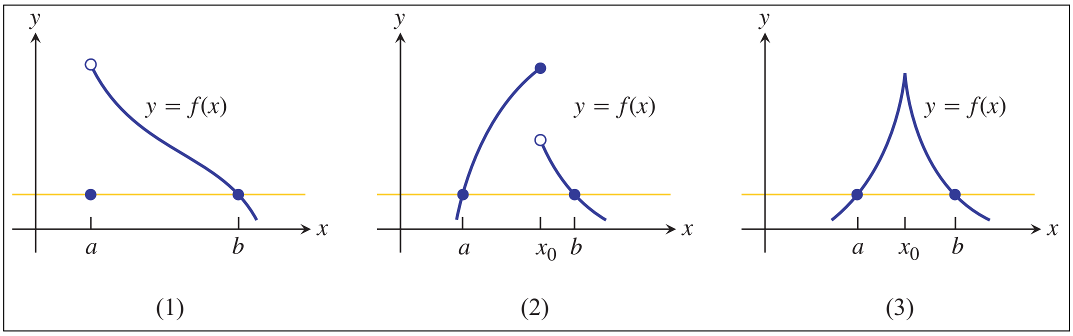
(b) Mostre que $g(a) = g(b)$.

(c) Use o teorema de Rolle para mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Respostas dos Exercícios

[01] As duas sentenças são falsas. Os gráficos (1) e (2) são contra-exemplos para (a) e o gráfico (3) é contra-exemplo para (b). Moral da história: no enunciado do teorema de Rolle, a hipótese de que f seja contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) não pode ser retirada.



[02] Seja $y = f(x) = x^3 + 3\,x + 1$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, segue-se pelo teorema da valor intermediário que f possui pelo menos uma raiz real a. Suponha, por absurdo, que f possua uma outra raiz real b. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $b > a$ (caso contrário, basta trocar a por b). Como f é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $f(a) = f(b) = 0$, podemos usar o teorema de Rolle para garantir a existência de um número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Mas isto é um absurdo, pois

$$f'(x) = 3\,x^2 + 3 > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

[03] Como f é contínua em $\mathbb{R}$, $f(-3) = -8 < 0$ e $f(-2) = 18 > 0$, segue-se pelo teorema da valor intermediário que f possui pelo menos uma raiz real a no intervalo $(-3,-2)$ Suponha, por absurdo, que f possua uma outra raiz real b no intervalo $(-3,-2)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $b > a$ (caso contrário, basta trocar a por b). Como f é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $f(a) = f(b) = 0$, podemos usar o teorema de Rolle para garantir a existência de um número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Mas isto é um absurdo, pois

$$f'(x) = 12\,(2\,x^2 + 5\,x + 2) = 12\,(x+2)(2\,x+1) > 0 \text{ para todo } x \in (-3,-2).$$

[04] (a) $c = 1/2$. (b) $c = 8/27$. (c) $c = 1$. (d) $c = (1 + 6\sqrt{2})/8$.

[05] Seja $p \in (a,b)$ fixo. Dado $x \in (a,b)$, com $x \neq p$, podemos usar o teorema do valor médio para garantir a existência de um ponto c (que depende de x) no intervalo aberto com extremidades p e x tal que

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(c).$$

Como, por hipótese, $f'(c) = 0$, segue-se que $(f(x) - f(p))/(x - p) = 0$. Logo, $f(x) - f(p) = 0$, isto é, $f(x) = f(p)$, para todo $x \neq p$. Isto mostra que f é constante no intervalo (a,b).

[06] A sentença é falsa. Considere, como contra-exemplo, $D = (-2,-1) \cup (+1,+2)$ e

$$y = f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in (-2,-1), \\ +1, & \text{se } x \in (+1,+2). \end{cases}$$

A função f é de classe C^1, $f'(x) = 0$ para todo $x \in D$, mas f não é uma função constante.

[07] Seja $h = f - g$. Temos que h é uma função de classe C^1 como diferença de funções de classe C^1. Uma vez que $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, segue-se pelo Exercício [03] que h é constante em (a, b), isto é, $h(x) = f(x) - g(x) = C$ para todo $x \in (a, b)$. Sendo assim,

$$f(x) = g(x) + C \text{ para todo } x \in (a, b).$$

[08] Seja $g(x) = 2\,x + 5$ e defina $h(x) = f(x) - g(x)$. Temos que g é uma função de classe C^1 e $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 2 - 2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo exercício anterior, existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$, para todo $x \in R$. Em particular, $f(0) = g(0) + C$, isto é, $5 = 5 + C$. Portanto, $C = 0$ e $f(x) = g(x) = 2\,x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[09] A sentença é falsa. Considere, como contra-exemplo,

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\,x + 5, & \text{se } x \in (-1, +1), \\ 2\,x + 7, & \text{se } x \in (+2, +3). \end{cases}$$

A função f é de classe C^1, $f'(x) = 2\,x$ para todo $x \in (-1, +1) \cup (+2, +3)$, mas $f(x) \neq 2\,x + 5$ para $x \in (+2, +3)$.

[10] (a) A função g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) como diferença de duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b).

(b) Note que $g(a) = 0$ e $g(b) = 0$. Assim, $g(a) = g(b) = 0$.

(c) Como g é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $g(a) = g(b)$, podemos usar o teorema de Rolle para garantir a existência de $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Assim,

$$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 04/06/2009.