DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I –A–
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

17

Crescimento e decrescimento de funções, máximos e mínimos globais, máximos e mínimos locais, o teorema de Weierstrass, a regra de Fermat e problemas de otimização

[01] Para cada caso abaixo, determine os intervalos onde a função é crescente e os intervalos onde a função é decrescente.

(a) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$, (b) $g(t) = \dfrac{3\,t^2 + 4\,t}{1 + t^2}$, (c) $F(u) = \dfrac{u^2 - u + 1}{2\,(u-1)}$.

[02] A função $y = f(x) = x^3 - 3\,x^2$ possui extremos globais no conjunto $A = [-1, 3]$? Em caso afirmativo, calcule estes extremos.

[03] A função $y = f(x) = 2\cos(x) + \operatorname{sen}(2\,x)$ possui extremos globais no conjunto $A = [0, 4\,\pi]$? Em caso afirmativo, calcule estes extremos.

[04] A função $y = f(x) = x^5/5 - x^3/3 + 2$ possui extremos globais no conjunto $A = [-2, 2]$? Em caso afirmativo, calcule estes extremos.

[05] **(Um outro teorema de globalidade)** Seja f uma função de classe C^1 e A um intervalo aberto (não necessariamente limitado). Suponha que f possua um único ponto crítico p em A que é mínimo local. Mostre que p é mínimo global de f em A. Analogamente, se f possui um único ponto crítico p em A que é máximo local, então p é máximo global de f em A.

[06] Mostre que $f(x) = \ln(x)/x$ tem máximo absoluto em $x = e$. Conclua que $\pi^e < e^\pi$. Dica: use o exercício [05].

[07] Mostre que $x + 1/x \geq 2$ para todo $x > 0$. Dica: use o exercício [05].

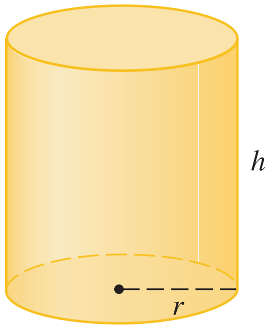
[08] Verdadeiro ou falso? Se A é um conjunto fechado e limitado e f é uma função descontínua em A, então f *não possui* extremos globais em A. Justifique a sua resposta!

[09] Verdadeiro ou falso? Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se A *não é* um conjunto fechado, então f *não possui* extremos globais em A. Justifique a sua resposta!

[10] Mostre que se $p \in A$ é ponto de mínimo global de f em A, então p é ponto de máximo global de $-f$ em A. Analogamente, se p é ponto de máximo global de f em A, então p é ponto de mínimo global de $-f$ em A. Moral da história: quem sabe resolver problemas de minimização, sabe resolver problemas de maximização e vice-versa!

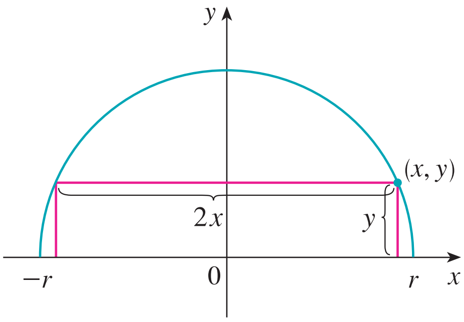
[11] Seja f uma função não-negativa em $A \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que se $p \in A$ é ponto de mínimo global de f em A, então $p \in A$ é ponto de mínimo global de $g(x) = (f(x))^2$ em A. Analogamente, se $p \in A$ é ponto de máximo global de f em A, então $p \in A$ é ponto de máximo global de $g(x) = (f(x))^2$ em A.

[12] Um fabricante deseja construir um recipiente, na forma de um cilindro circular reto, que deverá armazenar 1000 cm^3 de óleo (o recipiente possui as tampas circulares). O custo de produção do recipiente é medido pela área total do recipiente. Determine a altura h e o raio da base r do cilindro (ambos medidos em cm) que minimizam o custo de produção.

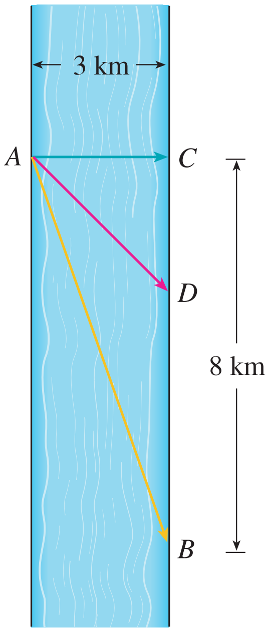


[13] Calcule o ponto da parábola $y^2 = 2\,x$ que está mais próximo do ponto $(1, 4)$.

[14] Um retângulo encontra-se inscrito em um semicírculo de raio r, como indica a figura a seguir. Encontre as dimensões do retângulo de maior área.

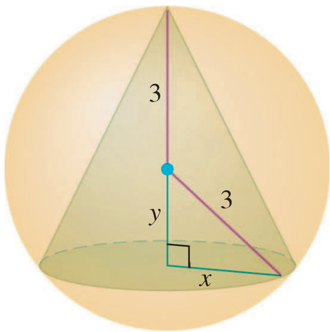


[15] Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km abaixo, conforme ilustra a figura seguinte.

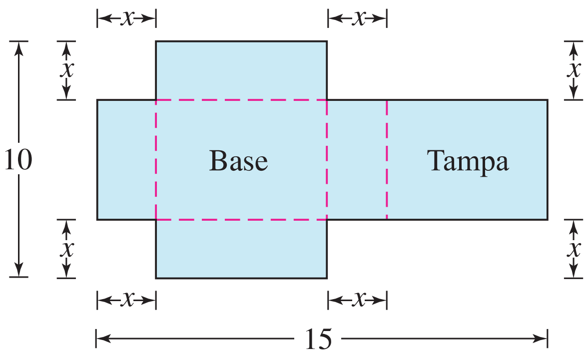


Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? Assuma que a velocidade da água é desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.

[16] Encontre o volume do maior cone circular reto que pode ser inscrito em uma esfera de raio 3 m.

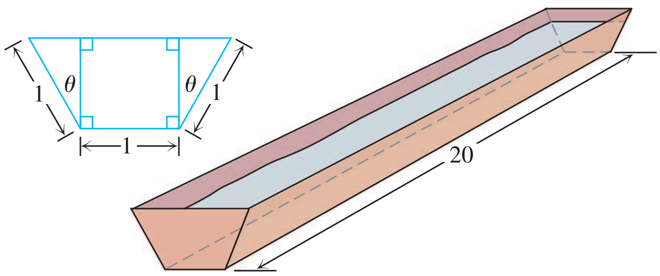


[17] Um fabricante quer construir caixas com tampa a partir de uma folha de papelão medindo 10 cm por 15 cm. Para construir a caixa, dois quadrados e dois retângulos são removidos dos cantos da folha de papelão, como indica a figura a seguir.



Determine o valor de x que maximiza o volume da caixa.

[18] A gamela na figura abaixo dever se construídas com as dimensões indicadas (em decímetros), apenas o ângulo θ pode variar. Qual é o valor de θ que maximiza o volume da gamela?



Respostas dos Exercícios

[01] (a) A função f é crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $\left(\sqrt[3]{6}, +\infty\right)$. Ela é decrescente no intervalo $\left(0, \sqrt[3]{6}\right)$.

(b) A função g é crescente no intervalo $(-1/2, 2)$. Ela é decrescente nos intervalos $(-\infty, -1/2)$ e $(2, +\infty)$.

(c) A função F é crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$. Ela é decrescente nos intervalos $(0, 1)$ e $(1, 2)$.

[02] A função f é contínua (pois f é uma função polinomial) e o conjunto $A = [-1, 3]$ é limitado, fechado e não-vazio. Pelo teorema de Weierstrass, sabemos que f possui pelo menos um ponto de máximo global e pelo menos um ponto de mínimo global em A. Os pontos de mínimo global de f em A são -1 e 2 e os pontos de máximo global são 0 e 3. O valor mínimo da função f em A é -4 e o valor máximo é 0.

[03] A função f é contínua (pois f é soma e composição de funções contínuas) e o conjunto $A = [0, 4\,\pi]$ é limitado, fechado e não-vazio. Pelo teorema de Weierstrass, sabemos que f possui pelo menos um ponto de máximo global e pelo menos um ponto de mínimo global em A. Os pontos de mínimo global de f em A são $5\,\pi/6$ e $17\,\pi/6$ e os pontos de máximo global são $\pi/6$ e $13\,\pi/6$. O valor mínimo da função f em A é $-3\sqrt{3}/2$ e o valor máximo é $+3\sqrt{3}/2$.

[04] A função f é contínua (pois f é uma função polinomial) e o conjunto $A = [-2, 2]$ é limitado, fechado e não-vazio. Pelo teorema de Weierstrass, sabemos que f possui pelo menos um ponto de máximo global e pelo menos um ponto de mínimo global em A. O ponto de mínimo global de f em A é -2 e o ponto de máximo global é 2. O valor mínimo da função f em A é $-26/15$ e o valor máximo é $86/15$.

[05] Suponha que $A = (a, b)$, possivelmente com $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Se $p \in A = (a, b)$ é o único ponto crítico de f em A, então o sinal da derivada não muda nos intervalos (a, p) e (p, b). Como, por hipótese, p é ponto de mínimo local, segue-se que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, p)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (p, b)$. Portanto, f é decrescente em (a, p) e crescente em (p, b). Como f é contínua, isto significa que $f(x) > f(p)$ para todo $x \in (a, p)$ e $f(p) < f(x)$ para todo $x \in (p, b)$. Conseqüentemente, p é ponto de mínimo global de f em $A = (a, b)$. Um argumento análogo pode ser usado para mostrar que se f possui um único ponto crítico p em A que é máximo local, então p é máximo global de f em A.

[06] O domínio de f é $A = (0, +\infty)$, que é um intervalo aberto. O único ponto crítico de f é $x = e$, que é um ponto de máximo local de f em A (use o testa da derivada primeira). Pelo exercício [05], $x = e$ é um ponto de máximo global de f em $A = (0, +\infty)$. Em particular, $f(e) > f(\pi)$, isto é, $\ln(e)/e > \ln(\pi)/\pi$ ou, ainda, $\pi \ln(e) > e \ln(\pi)$. Sendo assim, $\ln(e^\pi) > \ln(\pi^e)$. Como a função $x \mapsto \ln(x)$ é crescente, segue-se que $e^\pi > \pi^e$.

[07] Seja $A = (0, +\infty)$, que é um intervalo aberto. O único ponto crítico de f em A é $x = 1$, que é um ponto de mínimo local de f em A (use o testa da derivada primeira). Pelo exercício [05], $x = 1$ é um ponto de mínimo global de f em $A = (0, +\infty)$. Em particular, $f(x) \geq f(1)$ para todo $x \in (0, +\infty)$, isto é, $x + 1/x \geq 2$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

[08] A sentença é falsa! Como contra-exemplo, considere $A = [-1, +1]$ e

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x = -1, \\ 0, & \text{se } -1 < x < +1, \\ +2, & \text{se } x = +1. \end{cases}$$

A função f é descontínua em -1 e $+1$, mas f possui extremos globais em A: -1 é ponto de mínimo global de f em A e $+1$ é ponto de máximo global de f em A.

[09] A sentença é falsa! Como contra-exemplo, considere $A = (-5, +5)$ e $f(x) = \cos(x)$. O conjunto A não é fechado, mas f possui extremos globais em A: $-\pi$ e $+\pi$ são pontos de mínimo global de f em A e 0 é ponto de máximo global de f em A.

[10] Seja $p \in A$ um ponto de mínimo global de f em A. Então $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. Portanto,

$$-f(p) \geq -f(x),$$

para todo $x \in A$. Isto mostra que p é ponto de máximo global de f em A. Um argumento análogo pode ser usado para mostrar que se p é ponto de máximo global de f em A, então p é ponto de mínimo global de $-f$ em A.

[11] Se p é ponto de mínimo global de f em A, então $f(p) \leq f(x)$, para todo $x \in A$. Como f é não-negativa e a função $x \mapsto x^2$ é crescente em $[0, +\infty)$, segue-se que

$$g(p) = (f(p))^2 \leq (f(x))^2 = g(x)$$

para todo $x \in A$. Isto mostra que p é ponto de mínimo global de g em A. Um argumento análogo pode ser usado para mostrar que se $p \in A$ é ponto de máximo global de f em A, então $p \in A$ é ponto de máximo global de $g(x) = (f(x))^2$ em A.

[12] $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ cm e $h = 2\,\sqrt[3]{500/\pi}$ cm

[13] $(2, 2)$.

[14] Base $= 2\,x = \sqrt{2}\,r$ e altura $= y = \sqrt{2}\,r/2$.

[15] O homem deve aportar o bote no ponto $9/\sqrt{7}$ km $= 3.40\ldots$ km rio abaixo a partir do ponto C.

[16] $V = 32\,\pi/3$ m^3.

[17] $x = (25 - 5\,\sqrt{7})/6$ cm $= 1.96\ldots$ cm.

[18] $\theta = \pi/6$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 08/06/2009.