GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

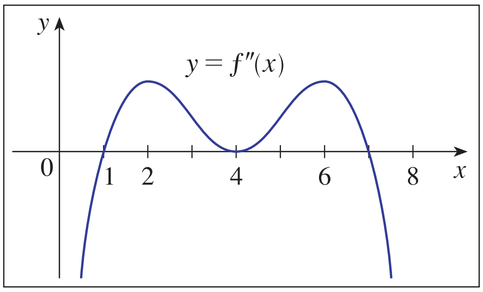
LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I –A–
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

18

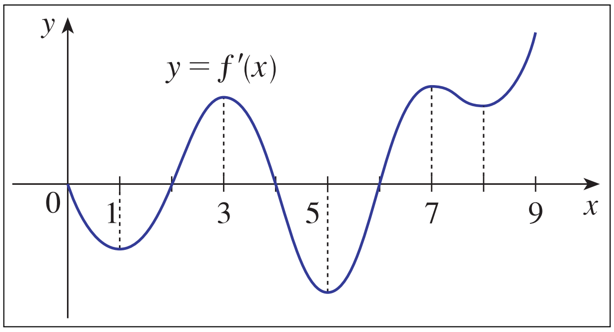
Esboço de gráficos de funções

[01] Verdadeiro ou falso? Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e $f''(p) = 0$, então $(p, f(p))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f. Justifique a sua resposta

[02] A figura abaixo exibe o gráfico da derivada segunda f'' de uma função f. Determine as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico de f.



[03] A figura abaixo exibe o gráfico da derivada primeira f' de uma função $f\colon [0, 9] \to \mathbb{R}$.



(a) Em quais intervalos a função f é crescente? E decrescente?

(b) Quais são os extremos locais de f?

(c) Quais são os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima? E côncavo para baixo?

(d) Quais são as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico de f?

[04] Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções dadas a seguir a partir da resolução dos 8 itens indicados abaixo:

(1) Determine o domínio natural da função f.

(2) Determine, caso existam, as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

(3) Determine se o gráfico de f possui alguma simetria: a função f é par, ímpar ou periódica?

(4) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f.

(5) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

(6) Determine os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo locais de f, caso existam.

(7) Determine, caso existem, os pontos onde f não é derivável.

(8) Determine os intervalos onde f é côncava para cima (convexa), os intervalos onde f é côncava para baixo e, caso existam, os pontos de inflexão do gráfico de f.

No seu desenho você deve indicar explicitamente os pontos críticos e os pontos de inflexão, caso existam. Qual é a imagem da função f? A função f possui extremos globais?

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x}$,

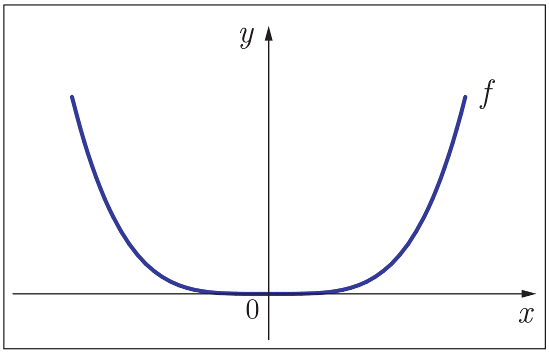
(b) $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{(x-2)^2}$,

(c) $f(x) = \dfrac{3\,x + 1}{\sqrt{x^2 - 2\,x - 3}}$,

(d) $f(x) = \dfrac{3\,x^2}{4 - 4\,x + x^2}$,

Respostas dos Exercícios

[01] Falso! Considere $y = f(x) = x^4$ e $p = 0$. Temos que $f''(0) = 12\,(0)^2 = 0$, mas $(0, f(0)) = (0, 0)$ *não é* ponto de inflexão do gráfico de f uma vez que não existe mudança de concavidade do gráfico de f, pois $f''(x) > 0$ para $x < p$ e para $x > p$.



[02] As abscissas são 1 e 7.

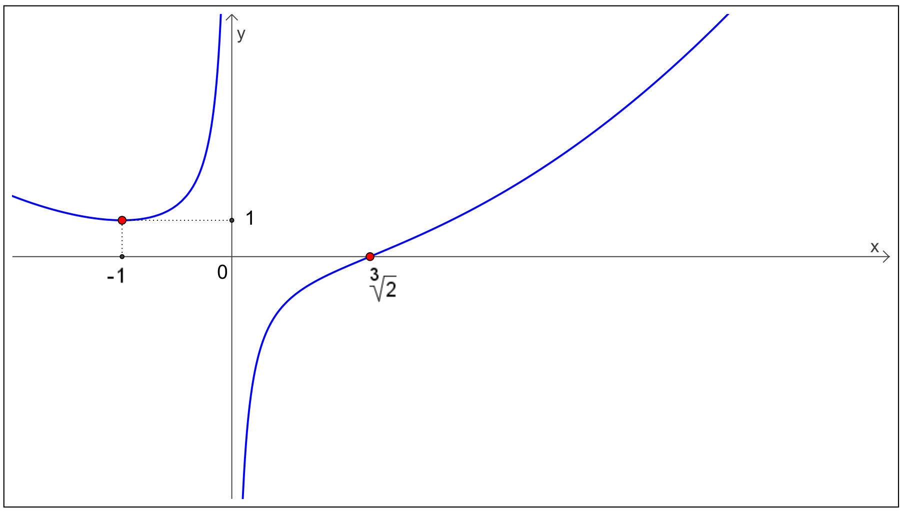
[03] (a) A função f é crescente nos intervalos $[2, 4]$ e $[6, 9]$ e ela é decrescente nos intervalos $[0, 2]$ e $[4, 6]$.

(b) Os extremos locais de f são 0 (máximo local), 2 (mínimo local), 4 (máximo local), 6 (mínimo local) e 9 (máximo local).

(c) O gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $[1, 3]$, $[5, 7]$ e $[8, 9]$ e ele é côncavo para baixo nos intervalos $[0, 1]$, $[3, 5]$ e $[7, 8]$.

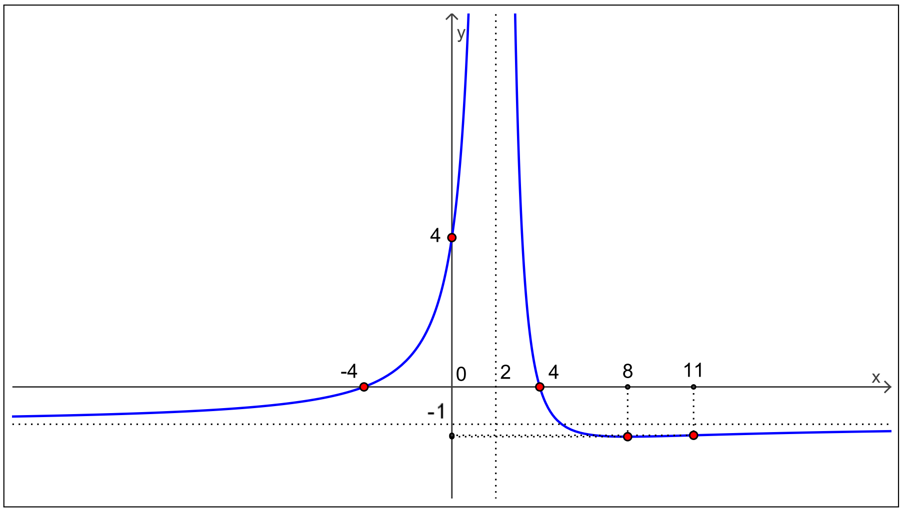
(d) As abscissas dos pontos de inflexão do gráfico de f são 1, 3, 5, 7 e 8.

[04] (a) (1) $D = \mathbb{R} - \{0\}$. (2) O gráfico de f não intercepta o eixo y. Ele intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$. (3) A função f não é par e nem ímpar. (4) O gráfico de f não possui assíntotas horizontais. A reta $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f. (5) A função f é crescente nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$. Ela é decrescente no intervalo $(-\infty, -1)$. (6) O único ponto crítico de f é $p = -1$, que é um ponto de mínimo local, com $f(-1) = 3$. (7) A função f é derivável em todos os pontos de seu domínio. (8) O gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ e côncavo para baixo no intervalo $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$. O ponto $(\sqrt[3]{2}, 0)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.



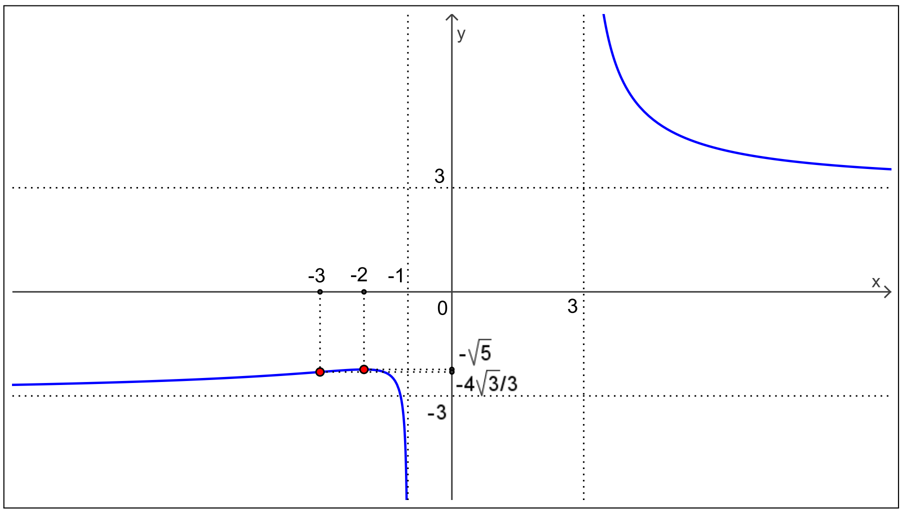
A imagem de f é $\mathbb{R}$. A função não possui extremos globais em seu domínio.

(b) (1) $D = \mathbb{R} - \{2\}$. (2) O gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 4)$. Ele intercepta o eixo x nos pontos $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. (3) A função f não é par e nem ímpar. (4) A reta $y = -1$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f. A reta $x = 2$ é a única assíntota vertical do gráfico de f. (5) A função f é crescente nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(8, +\infty)$. Ela é decrescente no intervalo $(2, 8)$. (6) O único ponto crítico de f é $p = 8$, que é um ponto de mínimo local, com $f(8) = -4/3$. (7) A função f é derivável em todos os pontos de seu domínio. (8) O gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, 11)$ e côncavo para baixo no intervalo $(11, +\infty)$. O ponto $(11, -35/27)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.



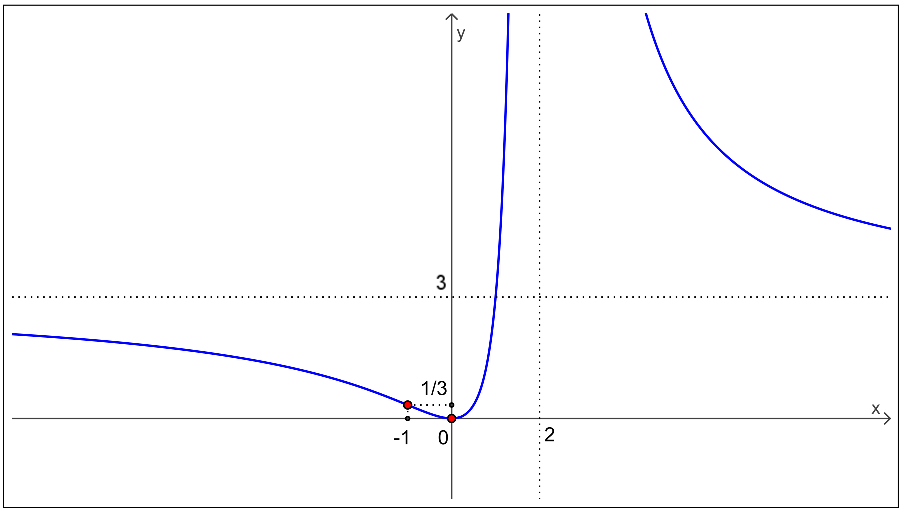
A imagem de f é $[-4/3, +\infty)$. O ponto $p = 8$ é o único ponto de mínimo global de f em seu domínio. A função não possui máximos globais.

(c) (1) $D = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. (2) O gráfico de f não intercepta o eixo y e nem o eixo x. (3) A função f não é par e nem ímpar. (4) As reta $y = -3$ e $y = 3$ são as únicas assíntotas horizontais do gráfico de f. As retas $x = -1$ e $x = 3$ são as únicas assíntotas verticais do gráfico de f. (5) A função f é crescente no intervalo $(-\infty, -2)$. Ela é decrescente nos intervalos $(-2, -1)$ e $(3, +\infty)$. (6) O único ponto crítico de f é $p = -2$, que é um ponto de máximo local, com $f(-2) = -\sqrt{5}$. (7) A função f é derivável em todos os pontos de seu domínio. (8) O gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(-\infty, -3)$ e $(3, +\infty)$ e côncavo para baixo no intervalo $(-3, -1)$. O ponto $(-3, -4\sqrt{3}/3)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.



A imagem de f é $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (3, +\infty)$. A função f não possui extremos globais em seu domínio.

(d) (1) $D = \mathbb{R} - \{2\}$. (2) O gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$ e o eixo x neste mesmo ponto. (3) A função f não é par e nem ímpar. (4) A reta $y = 3$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f. A reta $x = 2$ é a única assíntota vertical do gráfico de f. (5) A função f é crescente no intervalo $(0, 2)$. Ela é decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$. (6) O único ponto crítico de f é $p = 0$, que é um ponto de mínimo local, com $f(0) = 0$. (7) A função f é derivável em todos os pontos de seu domínio. (8) O gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(-1, 2)$ e $(2, +\infty)$ e côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, -1)$. O ponto $(-1, -1/3)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.



A imagem de f é $[0, +\infty)$. O ponto $p = 0$ é o único ponto de mínimo global de f em seu domínio. A função não possui máximos globais.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 23/06/2009.