LISTA DE EXERCÍCIOS

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi

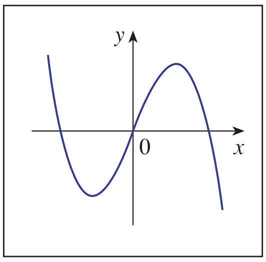
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

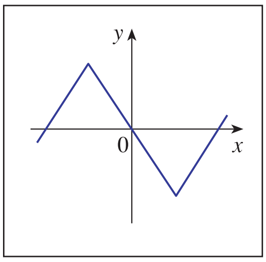
10

Derivadas das funções elementares e regras básicas de derivação

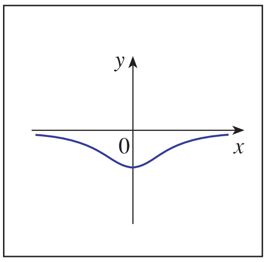
[01] Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em (1)-(4).



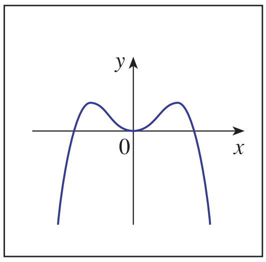
(a)



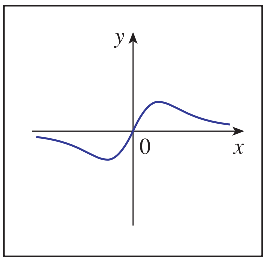
(b)



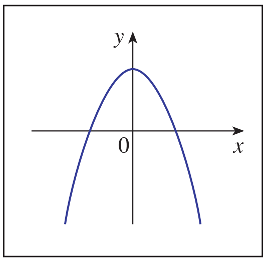
(c)



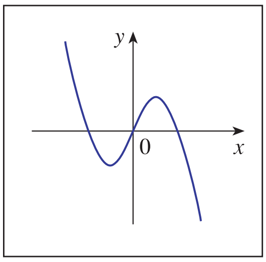
(d)



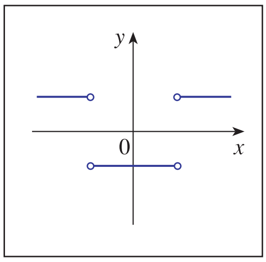
(1)



(2)

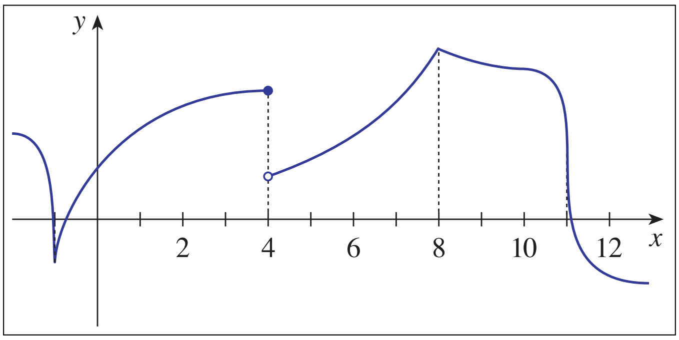


(3)



(4)

[02] O gráfico da função f é dado abaixo. Indique em quais pontos a função f não é diferenciável. Justifique a sua resposta.



[03] Derive cada uma das funções dadas abaixo.

(a) $f(x) = 5\,x - 1$, (b) $f(x) = x^2 + 3\,x - 4$, (c) $y = x^{-2/5} + 1/x$,

(d) $V(r) = 4\pi r^3/3$, (e) $Y(t) = 6\,t^{-9}$, (f) $F(x) = (16\,x)^3$,

(g) $y = 3\,x + 2\,e^x$, (h) $f(x) = ax^2 + bx + c$, (i) $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$.

[04] Encontre os pontos do gráfico da função $y = x^3 - x^2 - x + 1$ onde a reta tangente é horizontal.

[05] Mostre que a função $y = f(x) = 6\,x^3 + 5\,x - 3$ não possui uma reta tangente com inclinação igual a 4.

[06] A *reta normal* ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em um ponto $(p, f(p))$ é, por definição, a reta que passa por $(p, f(p))$ e é perpendicular a reta tangente ao gráfico de f neste ponto. Ache a equação da reta normal à parábola $y = 1 - x^2$ no ponto $(2, -3)$. Desenhe a parábola e a reta normal.

[07] Ache uma parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tenha equação $y = 3\,x - 2$.

[08] Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2, \\ m\,x + b, & \text{se } x > 2. \end{cases}$ Ache os valores de m e b que faça f diferenciável em $\mathbb{R}$.

[09] Derive cada uma das funções dadas abaixo.

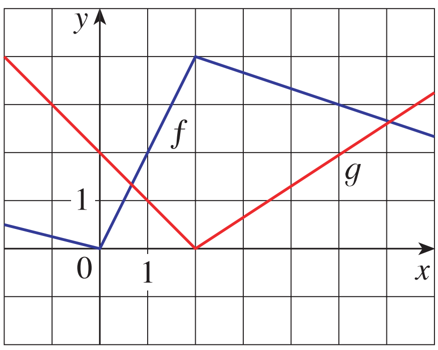
(a) $y = x^2 e^x$,	(b) $y = e^x/x^2$,	(c) $y = e^x/(1 + x)$,
(d) $y = (1 - u^2)/(1 + u^2)$,	(e) $y = (ax + b)/(cx + d)$,	(f) $y = x/(x + c/x)$,
(g) $y = 2\,(x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{tg}(x)$,	(h) $y = 2\,x\cos(x)\,\mathrm{tg}(x)$,	(i) $y = 1/\left(x^2 + 2\right)^2$.

[10] Sejam f e g funções diferenciáveis tais que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre: (a) $(f \cdot g)'(5)$, (b) $(f/g)'(5)$ e (c) $(g/f)'(5)$.

[11] Se h é uma função diferenciável com $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}.$$

[12] Os gráficos das funções f e g são dados na figura abaixo. Se $u(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$, calcule $u'(1)$ e $v'(5)$.



Respostas dos Exercícios

[01] (a)-(2), (b)-(4), (c)-(1), (d)-(3).

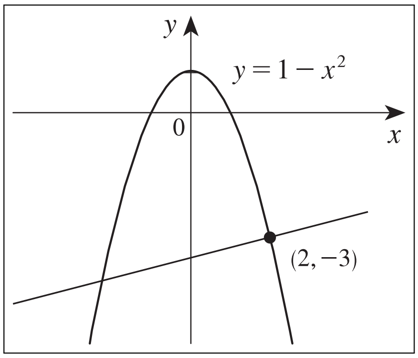
[02] A função f não é diferenciável em $p = -1$ (pois o gráfico de f tem um "bico" neste ponto), em $p = 4$ (pois f é descontínua neste ponto), em $p = 8$ (pois o gráfico de f tem um "bico" neste ponto) e em $p = 11$ (pois a reta tangente ao gráfico de f é vertical neste ponto).

[03] (a) $f'(x) = 5$, (b) $f'(x) = 2\,x + 3$, (c) $y' = -2\,x^{-7/5}/5 - 1/x^2$, (d) $V'(r) = 4\,\pi, r^2$, (e) $Y'(t) = -54\,t^{-10}$, (f) $F'(x) = 12288\,x^2$, (g) $y' = 3 + 2\,e^x$, (h) $f'(x) = 2\,ax + b$, (i) $y' = (x-1)/(2\sqrt{x}) + \sqrt{x}$.

[04] Os pontos são $(-1/3, 32/27)$ e $(1, 0)$.

[05] A inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$ é dada por $f'(x) = 18\,x^2 + 5$. Como $f'(x) = 4 \Leftrightarrow 18\,x^2 + 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = -1/18$ e a equação $x^2 = -1/18$ não possui solução real, vemos que não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 4$, isto é, não existe reta tangente ao gráfico de f cuja inclinação seja igual a 4.

[06] A equação da reta normal é $y = x/4 - 7/2$. A parábola e a reta normal estão desenhadas na figura abaixo.



[07] $y = 2\,x^2 - x$.

[08] $m = 4$ e $b = -4$.

[09] (a) $y' = xe^x(2 + x)$, (b) $y' = e^x(x - 2)/x^3$, (c) $y' = xe^x/(1 + x)^2$, (d) $y' = -4\,u/(1 + u^2)^2$, (e) $y' = (ad - bc)/(cx + d)^2$, (f) $y' = 2\,cx/(x^2 + c)^2$, (g) $y' = 2\,(x + 1)\,[(x + 1)\sec^2(x) + 2\,\mathrm{tg}(x)]$, (h) $y' = 2\,(\mathrm{sen}(x) + x\cos(x))$ (dica: $y = 2\,x\,\cos(x)\,\mathrm{tg}(x) = 2\,x\,\mathrm{sen}(x)$), (i) $y' = -4\,x/(x^2 + 2)^3$ (dica: $y = 1/(x^2 + 2)^2 = 1/(x^4 + 4\,x^2 + 4)$).

[10] (a) $(f \cdot g)'(5) = -16$, (b) $(f/g)'(5) = -20/9$ e (c) $(g/f)'(5) = 20$.

[11] $-5/2$.

[12] $u'(1) = 0$ e $v'(5) = -2/3$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 06/10/2009.