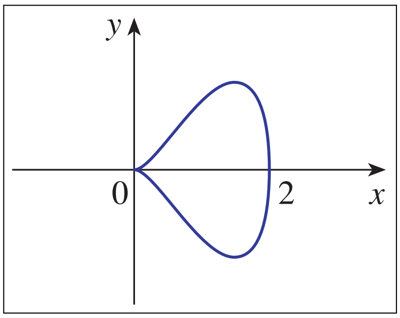
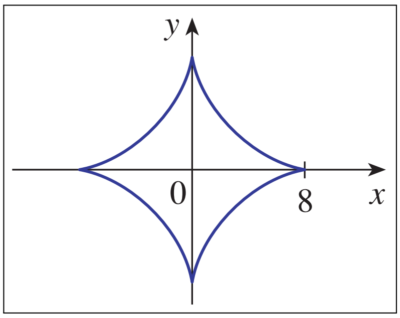
Diferenciação implícita e taxas relacionadas

[01] Use diferenciação implícita para calcular a equação da reta tangente a cada uma das curvas abaixo nos pontos indicados.

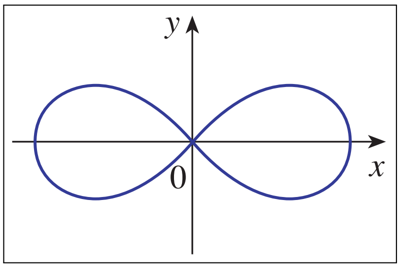
(a) Curva piriforme: $y^2 = x^3(2 - x)$ no ponto $(1, 1)$.



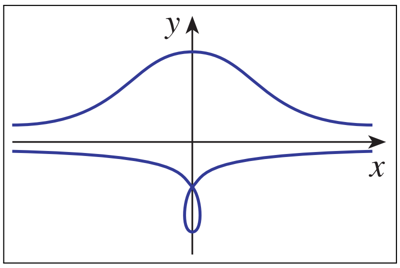
(b) Curva astróide: $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ no ponto $(-3\sqrt{3}, 1)$.



(c) Curva lemniscata: $2\,(x^2 + y^2)^2 = 25\,(x^2 - y^2)$ no ponto $(3, 1)$.



(d) Curva conchóide de Nicomedes: $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$ no ponto $(0, -2)$.

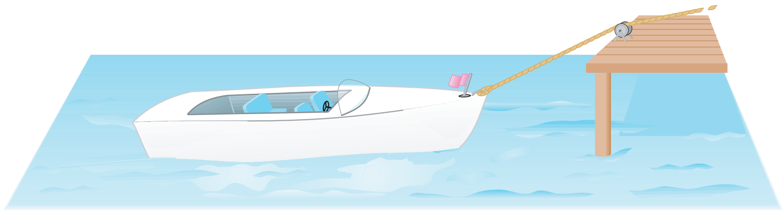


[02] Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $\sec^2(x+y) - \cos^2(x+y) = 3/2$. Calcule $f'(\pi/4)$, sabendo que $f(\pi/4) = 0$.

[03] Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $y^2 - y\sqrt{xy} + 2x^2 = 10$. Encontre a equação da reta normal ao gráfico da função f no ponto $(1, 4)$.

[04] Considere $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^4 - xy + y^4 = 1$. Calcule $f'(0)$, sabendo que $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

[05] Um bote é puxado em direção ao atracadouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (que está 1 m mais alto do que a proa do bote). Se a corda é puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido está se aproximando o bote do ancoradouro quando ele estiver a 8 m dele?



[06] Uma câmera de televisão no nível do solo está filmando a subida de um ônibus espacial que está subindo verticalmente de acordo com a equação $s = 15t^2$, sendo s a altura e t o tempo. A câmera está a 600 m do local de lançamento. Encontre a taxa de variação da distância entre a câmera e a base do ônibus espacial, 10 segundos após o lançamento (suponha que a câmera e a base do ônibus estão no mesmo nível no tempo $t = 0$).

[07] Dois carros começam a se mover a partir de um mesmo ponto. Um deles viaja para o sul com velocidade constante de 60 km/h e outro viaja para o oeste com velocidade constante de 25 km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre eles duas horas depois?

[08] O raio de luz de um farol, que está situado a 3 km de uma praia reta, faz 8 rpm (rotações por minuto). Considere a altura do farol desprezível em relação a sua distância até a praia. Ache a velocidade da extremidade do raio de luz, ao longo da praia, quando ele faz um ângulo de 45° com a linha da praia.

Respostas dos Exercícios

[01] (a) $y = x$, (b) $y = 4 + \sqrt{3}\,x/3$, (c) $y = 40/13 - 9\,x/13$, (d) $y = -2$.

[02] -1.

[03] $x = 1$.

[04] $1/4$.

[05] $-\sqrt{65}/8$ m/s.

[06] 278.54 m/s.

[07] 65 km/h.

[08] $96\,\pi$ km/minuto $\approx$ 5.03 km/h.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 27/10/2009.