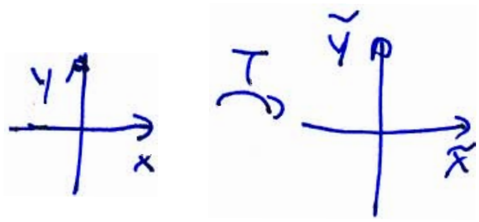
AULA 3

- **GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO PLANO NO PLANO**



$$T(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(HOMER)

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Identidade
- $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Homotetia
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Reflexão com relação ao eixo-y
  (REFLEXÃO COM RELAÇÃO AO EIXO-X?)
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Projeção no eixo-x
  (PROJEÇÃO NO EIXO-Y?)

~~ROTAÇÃO~~

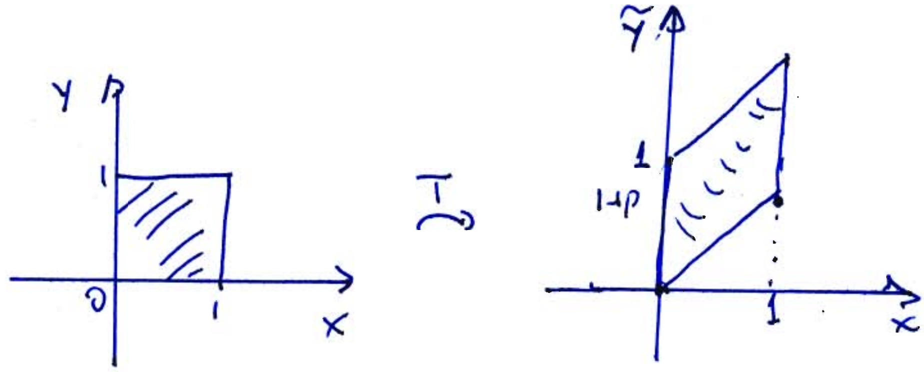
- $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ Rotação em torno da origem

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Rotação de 90° em torno da origem no sentido anti-horário

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ Cisalhamento na direção do eixo-y
  (EXERCÍCIO [03] DA LISTA 2)



$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= (x, px+y$$

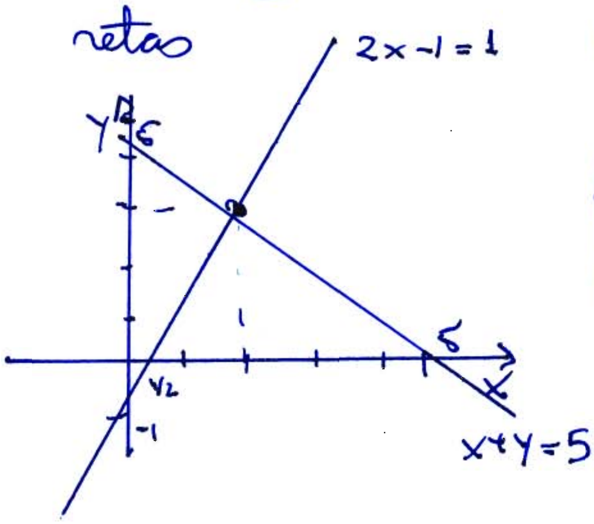
- MOTIVAÇÃO: SISTEMA LINEAR 2x2 (LINHAS E COLUNAS) (GEOGEBRA)

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

LINHAS

$2x - y = 1 \rightarrow$ reta
$x + y = 5 \rightarrow$ reta

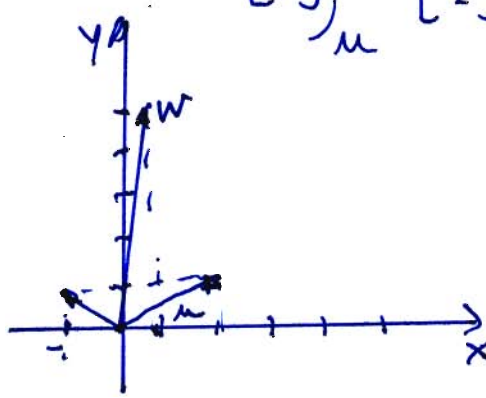
Solução do sistema: interseção das duas retas



COLUNAS

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{w}$$

O vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_w$ é combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_u$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_v$



→ OPERAÇÃO ELEMENTAR

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 9/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 9/2 \end{array}\right]$$

↳ MATRIZ ELEMENTAR

JÁ FALAR DA DECOMPOSIÇÃO LU AQUI

- MOTIVAÇÃO: SISTEMA LINEAR 3x3 (LINHAS E COLUNAS)

(ARCHIMEDES GEO 3D)

$$\begin{cases} 4x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$$

LINHAS

Cada linha determina a equação de um ~~[illegible]~~ plano.

Solução do sistema: interseção dos planos

Typical tasks
Plane
general form

(Mudar cor
Transparência 100%)

~~[illegible]~~

COLUNAS

O vetor $v_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ é ~~combinação~~ combinação linear dos vetores

$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

↳ software

↳ archimedes geo 3d

$$(x^\circ, y^\circ, z^\circ) = \left(\frac{5}{4}; \frac{5}{8}; \frac{5}{8}\right) = (1,25;\ 0,625;\ 0,625)$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4} L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 7/2 & 15/4 \end{array}\right]$$

$$2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - \underbrace{\frac{5/2}{5}}_{= 1/2} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 4 & 10/4 \end{array}\right]$$

$$4z = \frac{10}{4} \Rightarrow z = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$5y - z = \frac{5}{2} \Rightarrow 5y = \frac{5}{2} + z = \frac{5}{2} + \frac{5}{8} = \frac{25}{8}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$4x - 2y + 2z = 5 \Rightarrow 4x = 5 + 2y - 2z$$

$$= 5 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{U}$$

cisalhamentos
(matrizes elementares)

- OBSERVAÇÃO: Aplicar uma operação elementar é fazer um cisalhamento!

- OBSERVAÇÃO: Inverter um cisalhamento é fácil!

$$L_i \leftarrow L_i - aL_k$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

Assim: $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

- ESTRUTURA

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-c&1\end{bmatrix}}_{E_3}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-b&0&1\end{bmatrix}}_{E_2}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{E_1}A = U$$

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&0\end{bmatrix}U$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b&c&1\end{bmatrix}U$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{bmatrix}}_{L}U$$

U ↳ triangular superior

L ↳ triangular inferior com 1's na diagonal principal

$$A = LU \quad (\text{decomposição } LU)$$

- OBSERVAÇÃO: nem toda matriz possui uma decomposição LU

Exemplo (GOLUB, pág 97) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&7\\3&5&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}$

$u_{11} = 1$

$u_{12} = 2$

$u_{13} = 3$

$l_{21} = 2$

$2 l_{21} + u_{22} = 4 \Rightarrow u_{22} = 0$

$3 l_{21} + u_{23} = 7 \Rightarrow u_{23} = 1$

$l_{31} = 3$

$2 l_{31} + l_{32} \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{u_{22}} = 5 \Rightarrow 6 = 5$

(CONTRADIÇÃO)

• EXEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay \\ bx & by+cz \end{bmatrix}$$

(EXERCÍCIO EM SALA DE AULA?)

$ax = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $x = 0$

$a = 0$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & by+cz \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$x = 0$: $\begin{bmatrix} 0 & ay \\ 0 & by+cz \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

PROPOSIÇÃO: (a) Se L é triangular inferior inversível, então L^{-1} também é triangular inferior inversível

(b) Se L tem 1's na diagonal principal, então o mesmo ocorre com L^{-1}

Demonstração.

COLOCAR MAIS UMA LINHA E MAIS UMA COLUNA

(a)
$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{L^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

$=0$ $=0$

Se L é inversível, então todos os elementos da diagonal ~~p~~ principal são diferentes de zero.

Primeira linha de L

Da primeira coluna em diante

$$\begin{cases} a_{11} = 1/l_{11} \\ l_{11} a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12} = 0 \\ l_{11} a_{13} = 0 \Rightarrow a_{13} = 0 \\ \vdots \\ l_{11} a_{1n} = 0 \Rightarrow a_{1n} = 0 \end{cases}$$

$\cancel{l_{21} a_{11} + l_{22} a_{22}}$

Segunda linha de L

Da segunda coluna em diante

$$\begin{cases} l_{22} a_{22} = 1 \Rightarrow a_{22} = 1/l_{22} \\ \cancel{l_{21} a_{12} +} \\ l_{22} a_{23} = 0 \Rightarrow a_{23} = 0 \\ l_{22} a_{24} = 0 \Rightarrow a_{24} = 0 \\ \vdots \\ l_{22} a_{2n} = 0 \Rightarrow a_{2n} = 0 \end{cases}$$

E assim por diante...

(b) Note que, em (a), se $l_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então $a_{ii} = \dfrac{1}{l_{ii}} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. ∎

PROPOSIÇÃO Se L_1 e L_2 são matrizes triangulares inferiores, então $L_1 L_2$ também é triangular inferior. Se L_1 e L_2 tem 1's na diagonal principal, o mesmo ocorre com $L_1 L_2$

O produto de duas matrizes triangulares superiores é triangular superior.

Demonstração:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}_{L_2}$$

∎

TEOREMA: Se A é inversível e tem decomposição LU com os elementos da diagonal de L todos iguais a 1, então esta decomposição é única.

Demonstração: $A = LU = \tilde{L}\tilde{U}$

Como A é inversível, U e $\tilde{U}$ também são inversíveis.

Então

$$LU = \tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow (\tilde{L})^{-1} L U = \tilde{U}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\tilde{L})^{-1} L}_{\text{triangular inferior}} = \underbrace{U^{-1}\tilde{U}}_{\text{triangular superior}} = D$$

Logo D é uma matriz diagonal. Como $(\tilde{L})^{-1}$ e L têm 1's na diagonal principal, segue-se que $D = I$.

Assim, $(\tilde{L})^{-1} L = I \Rightarrow L = \tilde{L}$

$$U^{-1}\tilde{U} = I \Rightarrow U = \tilde{U}$$

$\blacksquare$

MENORES PRINCIPAIS LÍDERES

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$|A_1| = \det(a_{11})$ menor principal líder de ordem 1

$|A_2| = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ menor principal líder de ordem 2

$\vdots$

$|A_n| = \det(A)$ menor principal líder de ordem n

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = \det(2) = 2$$

$$|A_2| = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -9$$

$$|A_3| = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -9$$

TEOREMA As seguintes sentenças são equivalentes

(1) Existe uma única decomposição $A = LU$ com L triangular inferior com 1's na diagonal principal e U inversível

(2) Todos os menores principais líderes de A são diferentes de zero

(Demmel, página 39)

BLOCOS

MULTIPLICAÇÃO POR BLOCOS

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A_{r\times r} & B_{r\times(n-r)} \\ \hline C_{(n-r)\times r} & D_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right]$$

$$\tilde{M} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{r\times r} & \tilde{B}_{r\times(n-r)} \\ \hline \tilde{C}_{(n-r)\times r} & \tilde{D}_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right]$$

$$M\tilde{M} = \left[\begin{array}{c|c} A\tilde{A}+B\tilde{C} & A\tilde{B}+B\tilde{D} \\ \hline C\tilde{A}+D\tilde{C} & C\tilde{B}+D\tilde{D} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & i \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ \tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f} \\ \hline \tilde{g} & \tilde{h} & \tilde{i} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{d} & \tilde{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}[\tilde{g}\ \tilde{h}] & \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}[\tilde{i}] \\ \hline [g\ h]\begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{d} & \tilde{e} \end{bmatrix} + i[\tilde{g}\ \tilde{h}] & [g\ h]\begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{f} \end{bmatrix} + [i][\tilde{i}] \end{array}\right].$$

Demonstração.

(1) ⇒ (2) Escrever, bloco principal $k\times k$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

Por hipótese A tem uma decomposição LU.

A decomposição em blocos da matriz A induz decomposições em blocos em L e U

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & U_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ \hline L_{21}L_{22} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{21} \end{array}\right]$$

Logo $A_{11} = L_{11}\, U_{11}$

U_{11} ↳ matriz triangular superior

L_{11} ↳ triangular inferior com 1's na diagonal principal, logo inversível

U_{11} é inversível pois $\det(U_{11}) = \prod_{j=1}^{k} (U_{11})_{jj} \neq 0$,

pois por hipótese, U é inversível.

$(2) \Rightarrow (1)$ Será feita por indução no tamanho da matriz A.

<u>caso $n=1$</u> $A = [a]$. Como $a \neq 0$, então

$$A = \underbrace{[1]}_{L}\ \underbrace{[a]}_{U}$$

U ↳ triangular superior inversível

L ↳ triangular inferior

PASSO INDUTIVO

Seja M uma matriz $(n+1)\times(n+1)$ cujos menores principais líderes de todas as ordens são diferentes de 0.

Escreva:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A_{n\times n} & b_{n\times 1} \\ \hline (c^T)_{1\times n} & \delta_{1\times n} \end{array}\right]$$

Como os menores principais líderes de todas as ordens de A (que também são de M) são diferentes de zero, pela hipótese de indução, existem únicas L e U com

$$A = L\,U$$

U ↳ triangular superior inversível

L ↳ triangular inferior ~~inversível~~ inversível.

Será que existe uma única decomposição para M?

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & \delta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L & 0 \\ \hline \ell^T & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} U & u \\ \hline 0 & \eta \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} LU & Lu \\ \hline l^T U & l^T u + \eta \end{array}\right]$$

Sim!

$b = Lu \Rightarrow u = L^{-1}b$

(o vetor u é unicamente determinado)

$c^T = l^T U \Rightarrow U^T l = c \Rightarrow l = (U^T)^{-1} c$

↳ inversível (o vetor l é unicamente determinado)

$l^T u + \eta = \delta \Rightarrow \eta = \delta - l^T u$

(o número η é unicamente determinado)!

Resta mostrar que $\eta \neq 0$. Agora

$$\underset{\neq 0}{\det(M)} = \underset{\neq 0}{\det(L)}\, \underset{\neq 0}{\det(U)} \cdot \eta \Rightarrow \eta \neq 0.$$

$\blacksquare$

OBSERVAÇÃO: Uma caracterização para a existência de uma decomposição LU para matrizes singulares foi dada por Okunev e Johnson em 1997.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES USANDO A DECOMPOSIÇÃO LU

- Decomponha: $A = LU$
- $Ax = b \Rightarrow LUx = b$
- Resolva $Ly = b$ (fácil)
- Resolva $Ux = y$ (fácil)

ALGORITMO PARA A DECOMPOSIÇÃO LU

(GOLUB e VAN LOAN, PÁG 99)

```
for k = 1: n-1
    for i = k+1: n
        A(i,k) = A(i,k)/A(k,k)
        for j = k+1: n
            A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j)
        end
    end
end
```

Número de operações: $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (1 + n - (k+1) + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (1 + n - k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left((1+n-k) \left(\sum_{i=k+1}^{n} 1 \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left((1+n-k)(n-k) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(n - k + n^2 - kn - kn + k^2 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n+n^2) \cancel{+ \sum_{k=1}^{n} (-2k-1)}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} (2n+1)k + \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= (n+n^2) \sum_{k=1}^{n-1} 1 - (2n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$\cancel{= (n+n^2)\, n - (2n+1) \frac{(1+n)n}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\cancel{= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}}$$

$$= (n+n^2)(n-1) - (2n+1)\frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)}{6}$$

$$= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$$

$$\boxed{\text{FATO: } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}$$

SUBSTITUIÇÃO RETROATIVA $(Ux=y)$

```
for j = n:-1:1
    s = 0
    for k = j+1:n
        s = s + U(k,j) * x(j)
    end
    x(j) = (y(j) - s)/U(j,j);
end
```

→ isto é importante no MATLAB, caso contrário, o loop não é executado

Número de ~~operações~~ operações:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=j+1}^{n} 1\right) + 1\right) = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1) = (n+1)\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} j$$

$$= (n+1)n - \frac{(1+n)n}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

. NÚMERO DE OPERAÇÕES USANDO A REGRA DE CRAMMER COM O CÁLCULO DO DETERMINANTE VIA ~~REG~~ REGRA DE LAPLACE

$n = 1 \quad c_1 = 0$

$n = 2 \quad c_2 = 2$

$$n = 3 \qquad \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{vmatrix} \overbrace{\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \cdot \end{vmatrix}}_{c_2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \cdot \end{vmatrix}}_{c_2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \cdot \end{vmatrix}}_{c_2}}^{3}$$

$$c_3 = \cancel{3 \cdot c_2}\ \cancel{3 + 3c_2}\ 3 + 3c_3$$

$$n = 4 \qquad c_4 = \cancel{4 \cdot c_3}\ 4 + 4c_4$$

$$\cancel{c_n = n \cdot c_{n-1} = \cdots = n \cdots 3 c_2}$$

$$c_n = n + n c_{n-1}$$

Em particular, $c_n \geq n c_{n-1}$

Então

$$c_n \geq n(n-1) \cdots 3 c_2 = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2$$
$$= n!$$