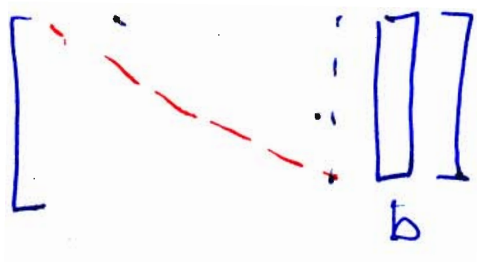
AULA 4

ce aluno 1
FGV 1111

- GAUSS-JORDAN X DECOMPOSIÇÃO LU



PARTE 1

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n+1} 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

PARTE 2

pois é preciso fazer em b!

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right)$$

colunas (da última até a segunda)

$$= n^2 - n$$

DIVISÃO

$$n$$

TOTAL: $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$

$$+ 2\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right) + n$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}n^3 + n^3 - \frac{1}{3}n}$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

$A = LU$ $\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n\right)$

$Ly = b$ $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

$Ux = y$ $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

TOTAL: $\frac{1}{3}n^3$

$-\frac{1}{3}n$

$+n^2$

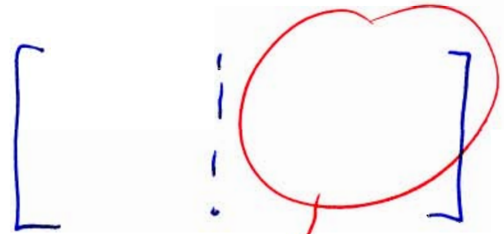
$$= \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$$

$Ly = b$

```
y(1) = b(1)
for i = 2: n
    s = 0
    for k = 1: i-1
        s = s + L(i,k)*y(k)
    end
    y(i) = b(i) - s
end.
```

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} 1 = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

INVERTER UMA MATRIZ



PARTE 1

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\left(1+\sum_{j=k+1}^{2n}1\right)$$

$$= \frac{5}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{3}n$$

PARTE 2

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)\,k = \cancel{\frac{n^3}{2}-\frac{n^2}{2}}$$

$$\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}$$

DIVISÃO

$$n\times n = n^2$$

TOTAL

$$\frac{5}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{3}n+\frac{n^3}{2}-\cancel{\frac{n}{2}}\ n/2$$

$$+n^2$$

$$= \cancel{\frac{4}{3}n^3-\frac{1}{3}n}\ \frac{4}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$$

$$\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$$

$$+n\left(2\times\left(\frac{n^2}{2}-\cancel{\frac{n}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$$

$$+n^3-\cancel{n^2}$$

$$= \frac{4}{3}n^3\ \cancel{n^2}-\frac{1}{3}n$$

OBSERVAR QUE UMA DIFERENÇA ENTRE ESCALONAMENTO E DECOMPOSIÇÃO LU É QUE L e U SÃO ARMAZENADAS. AO SE RESOLVER $Ax = LUx = b$, NÃO É PRECISO ESCALONAR (RECALCULAR L e E) NOVAMENTE

~~FAZER UM ESCALONAMENTO COMPLETO QUEBRARIA A ESTRUTURA LU~~

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em termos matriciais

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{F_k \cdots F_1}_{\text{cisalhamentos horizontais}} \underbrace{E_k \cdots E_1}_{\text{cisalhamentos verticais}} A$$

Só funciona multiplicando-se pela esquerda

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{6}{3} L_1}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

NECESSIDADE DE PERMUTAR LINHAS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}}_{A}$$

↳ ~~matriz~~ matriz de permutação!

UM POUCO SOBRE MATRIZES DE PERMUTAÇÃO

- E_{rs} a matriz identidade com as linhas r e s permutadas.

(PERMUTAÇÃO ELEMENTAR)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad r & s \end{array} \\ r \rightarrow \\ s \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots 1 \end{bmatrix}$$

Note que as colunas r e s também foram permutadas.

- $E_{r,s}A$ ~~...~~ permuta as linhas r e s de A
- $AE_{r,s}$ permuta as colunas r, s de A.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

↳ justificativa: multiplicação de matrizes e combinação linear

- $E_{r,s}$ é inversível, $\det(E_{r,s}) = -1$ para $r \neq s$.

Mais ainda, $E_{r,s}^{-1} = E_{rs}$.

- $E_{rs}^{T} = E_{rs}$

• Mais geralmente, seja

$$P = E_{r_k s_k}\cdots E_{r_2 s_2} E_{r_1 s_1}$$

~~Esta matriz~~ Cada linha de P tem apenas uma entrada igual a 1, ~~todas as de~~ as outras são todas nulas.

Cada coluna de P tem apenas uma entrada igual a 1 as outras são todas nulas.

$$P^{-1} = P^T$$

De fato: $P^T P = (E_{r_k s_k}\cdots E_{r_1 s_1})^T (E_{r_k s_k}\cdots E_{r_1 s_1})$

$\cancel{= E_{r_1 s_1}^T \cdots E_{r_k s_k}^T E_{r_k s_k}\cdots E_{r_k s_k}}$

$\cancel{= E_{r_1 s_1}\cdots E_{r_k s_k}}$

$= E_{r_1 s_1}^T \cdots E_{r_k s_k}^T E_{r_k s_k}\cdots E_{r_1 s_1}$

$\cancel{= E_{r_k}\cdots E}$

$\cancel{= E_{r_2}}$

$= \underbrace{E_{r_1 s_1}\cdots \underbrace{E_{r_k s_k} E_{r_k s_k}}_{I}\cdots E_{r_1 s_1}}_{I}$

$= I$

P pode não ser simétrica!

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \\ l_3 \\ l_1 \\ l_4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{13}}$$

$$P^T = (E_{12}E_{13})^T = E_{13}^T E_{12}^T = E_{13}E_{12} \neq P$$

Trocar 1 e 3 e depois trocar 1 e 2 não é a mesma coisa que trocar 1 e 2 e depois trocar 1 e 3

DECOMPOSIÇÃO LU COM PIVOTAMENTO PARCIAL

$$\cancel{P_3} E_2 P_2 E_1 P_1 A = U$$

~~Pergunta~~ Aqui P_i são matrizes de permutação e (na verdade são matrizes de permutação elementares!)

E_i são composições de cisalhamentos.

~~Pergunta: $E_2 P_2 E_1 P_1$ é ainda uma matriz triangular inferior? Com 1 na diagonal?~~

~~$E_2 P_2 E_1 P_1 \cdots P_2 P_1$~~

Observe agora.

~~$E_2 P_2 E_1 P_1 A$~~

~~$E_1 P_1^{-1} P_2^{-1} P_2 P_1$~~

$$E_2 P_2 E_1 P_1 A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} P_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} P_1 \; A$$

P_1 ↳ permuta a primeira linha

P_2 → permuta a segunda linha

$P_1 = E_{1,\ell_1}$ com $\ell_1 > 1$

$P_2 = E_{2,\ell_2}$ com $\ell_2 > 2$

$P_3 = E_{3,\ell_3}$ com $\ell_3 > 3$

$\vdots$

$$= E_2 \underbrace{P_2\, E_1\, P_2^{-1}}_{E_2'} P_2 P_1\, A$$

$$= E_2\, E_2'\, P_2 P_1\, A$$

Aqui P_i, na verdade são permutações elementares!

E_1 triangular inferior

$\Downarrow$

E_1' triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ é importante que E_1 tenha zeros aqui!

$$P_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 P_3 E_2 P_2 E_1 P_1 A$$

$$\|$$

$$E_3\, P_3^{-1}\Big(P_3 P_2 E_1 P_2^{-1} P_3^{-1}\Big) P_3 P_2 P_1 A$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a & 1 & & \\ b & & 1 & \\ c & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo: $E_3 P_3 E_2 P_2 E_1 P_1 A = E_3 \underbrace{(P_3 E_2 P_3^{-1})}_{\tilde{E}_2} \underbrace{(P_3 P_2 E_1 P_2^{-1} P_3^{-1})}_{\tilde{E}_1} P_3 P_2 P_1 A$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E P_3 \dots P_1 A = U}$$

ainda triangulares inferiores com 1's na diagonal principal

No caso geral, obtemos a seguinte decomposição

$$E_k \cdots E_1 P A = U$$

$$\Downarrow$$

$$PA = \underbrace{E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}}_{L} U$$

$$\Downarrow$$

$$PA = LU$$

GOLUB guarda a permutação através de um vetor $p(1:k-1)$

$p = (4, 2, 3)$

$p(1) = 4$ (trocar 1 com 4)

$p(2) = 4$ (trocar 2 com 4)

$p(3) = 4$ (trocar 3 com 4)

DETALHES DO CÁLCULO DA SOLUÇÃO DO SISTEMA E DA DECOMPOSIÇÃO LU PARA O CASO DO PIVOTAMENTO: GOLUB, páginas 112 e 113

$Ax = b$

$$\underbrace{E_3P_3E_2P_2E_1P_1A}_{U}x = \underbrace{E_3P_3E_2P_2E_1P_1b}_{y}$$

Ux

No MATLAB: $[L, U, P] = lu(A)$

OBSERVAÇÕES:

- Toda matriz A tem uma decomposição na forma $PA = LU$
- Em geral, a escolha do pivô é o maior elemento, em módulo. Mesmo que não exista a necessidade de pivotamento, seu uso aumenta a estabilidade.

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10^{20} é muito maior do que 1

Sem pivotamento

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix}$$

$1 - 10^{20}$ é arredondado para -10^{20} pela aritmética de ponto flutuante

$1 - 10^{20}$ é aproximado para um dos números que o computador pode aproximar

$-1 \cdot 10^{20}$

$-1.1 \cdot 10^{20}$

$\vdots$

$-9.9 \cdot 10^{20}$

$-1 \cdot 10^{21}$

Com o arredondamento da máquina:

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}\tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se resolvermos o sistema

$$Ax = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo sem pivotamento:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 10^{20} y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^{20} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10^{-20} x_1 + x_2 = 1 \\ -10^{20} x_2 = -10^{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_1 = 0. \end{matrix}$$

Enquanto que a solução correta é

$$\cancel{\approx (-1, 1)}$$

$$\left(\frac{1}{10^{-20} - 1}, \frac{1}{1 - 10^{-20}} \right) \approx (-1, 1)$$

Com pivotamento

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

APROXIMADO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-20} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-10^{-20} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

No MATLAB:
format long e

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \qquad Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow LUx = Pb$$

$$\begin{cases} y_1 + 0 = 0 \\ 10^{-20} y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 0 \quad \cancel{y_2 = 1-10^{-20}} \quad y_2 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

SOLUÇÃO EXATA:

$$x_1 = \frac{1}{10^{-20} - 1}, \quad x_2 = \frac{1}{1 - 10^{-20}}$$

~~Se A é diagonal dominante (o maior elemento em módulo está na diagonal principal~~

- Dizemos que A é diagonal dominante se

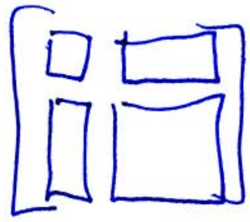
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ~~não é diagonal dominante~~

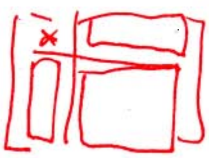
PROPOSIÇÃO: Se A^T é diagonal dominante, então a decomposição LU de A pode ser calculada sem pivotamento de linhas.

Demonstração: (GOLUB e VAN LOAN, Matrix Computations, 3 ed, página 120)

Se A^T é diagonal dominante α deve ser diferente de zero.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1\times 1} & w^T \\ v & C \end{bmatrix}}_{A}$$



~~Feito~~ Feita por indução!

CASO $n=1$

$\alpha_{11} \neq 0$

PASSO INDUTIVO

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v/\alpha & I \end{bmatrix}}_{E_{alfa}} \begin{bmatrix} \alpha_{1\times 1} & w^T \\ v & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & -\frac{v w^T}{\alpha} + C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C - \frac{v w^T}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v/\alpha & I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C - \frac{v w^T}{\alpha} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Se mostrarmos que B^T é diagonal dominante, por indução, teremos uma decomposição LU para A a partir da decomposição $B = L_B U_B$:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ v/\alpha & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & L_B U_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & w^T\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

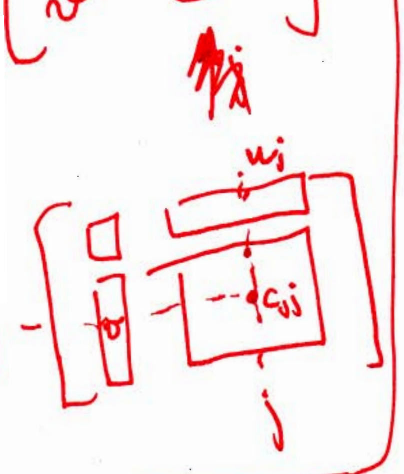
$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ v/\alpha & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & w^T\\ 0 & L_B U_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & w^T\\ v & L_B U_B\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ v/\alpha & L_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & w^T\\ 0 & U_B\end{bmatrix}.$$

Para ver que B^T é diagonal dominante:

VARIAR AS LINHAS!!!

$$\begin{bmatrix}\alpha & w^T\\ v & C\end{bmatrix}$$



$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |b_{ij}| = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \left| c_{ij} - \frac{v_i w_j}{\alpha} \right|$$

não dependem de i

$$\le \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |c_{ij}| + \frac{|w_j|}{|\alpha|} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i|$$

$$\le (|c_{jj}| - |w_j|) + \frac{|w_j|}{|\alpha|}(|\alpha| - |v_j|)$$

$$= |c_{jj}| - \left| \frac{w_j v_j}{\alpha} \right|$$

$|a| - |b| \le |a - b|$

$$\le \left| c_{jj} - \frac{w_j v_j}{\alpha} \right| = |b_{jj}|. \quad \blacksquare$$

(A) $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |c_{ij}| + |w_j| < |c_{jj}|$

(B) $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i| + |v_j| < |\alpha|$

VARIANTES:

- Decomposição LDU → Para matrizes inversíveis!

L: triangular inferior com "1's" na diagonal principal

D: diagonal

U: triangular superior com "1's" na diagonal.

Se A é inversível, então A possui no máximo uma única decomposição LDU.

Prova: ~~$(LD)U = (\tilde{L}\tilde{D})\tilde{U}$~~

~~⇓ (resultado anterior)~~

~~$LD = \tilde{L}\tilde{D}$ e $DU = \tilde{D}\tilde{U}$~~ $U = U$

~~⇓~~

~~$D = \tilde{D}$ $L = \tilde{L}$, $D = \tilde{D}$, $U = \tilde{U}$~~

(TANTO FAZ pois L e U tem "1" na diagonal principal

$LDU = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$

⇓

$L(DU) = \tilde{L}(\tilde{D}\tilde{U})$

⇓ resultado anterior

$L = \tilde{L}$ e $DU = \tilde{D}\tilde{U}$ (1 na diagonal principal)

⇓

$L = \tilde{L}$, $D = \tilde{D}$ e $U = \tilde{U}$

- Decomposição de Cholesky: se A é uma matriz simétrica:

$$A = \cancel{LDL} \; \underbrace{LL^T}_{\text{não necessariamente com 1's na diagonal principal}}$$

Se A é simétrica inversível

$$A = LDU \Rightarrow A^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$$
$$= A$$

$$L = U^T \Rightarrow U = L^T$$

Logo

$$A = LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

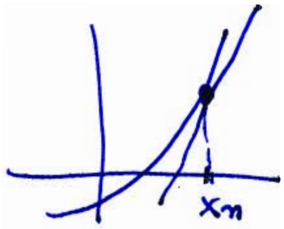
se $d_i > 0$, $\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \sqrt{d_2} & \\ & & \ddots \; \sqrt{d_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}$

$D = \sqrt{D}$

APLICAÇÃO: INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

APLICAÇÃO: MÉTODO DE NEWTON

- Lembrar o caso $n=1$



- O caso geral:

$$y = \cancel{x}\, F(p) + F'(p)(x-p)$$

onde $F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$

é a matriz ~~jacob~~ jacobiana de F em x

$$y=0 \Rightarrow F'(p)\underbrace{(x-p)}_{\delta} = -F(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{F'(p)\,\delta = -F(p)}$$

SISTEMA LINEAR

ALGORITMO:

(1) x_0 dado.

(2) Resolver

$$F'(x_0)\delta = -F(x_0)$$

$$x_1 = x_0 + \delta$$

(3) $F(x_0) \overset{?}{\approx} 0$ (ou $x_1 \approx x_0$)?

Se sim, pare!

Caso contrário: $x_0 = x_1$

~~volte~~ retorne ao passo 2.

EXEMPLO:

$$F_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$
$$F_2(x_1,x_2) = \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) + x_2^3$$

$$DF = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ +\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right)\frac{\pi}{2} & 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

MATRIZES POSITIVAS DEFINIDAS

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz simétrica. Dizemos que A é positiva definida se

$$x^T A x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0.$$

Matrizes positivas definidas ~~aparecem~~ aparecem, por exemplo, na classificação de pontos críticos.

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{1}{2}(x-p)^T f''(p)(x-p)$$

onde $f''(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p) \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$ é a

matriz hessiana de f em p.

Se p é extremo local de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então p é ponto crítico de f (Regra de Fermat). Assim

$$f(x) \approx f(p) + \frac{1}{2}(x-p)^T f''(p)(x-p)$$

Se $f''(p)$ é positiva definida, então p é um ponto de mínimo local de f.

Como saber se uma matriz A é positiva definida?

(1) A é positiva definida $\Leftrightarrow$ todos os menores ~~pm~~ principais líderes são > 0

(2) A é positiva $\Leftrightarrow$ todos os autovalores de A são > 0.

(3) A é positiva definida $\Leftrightarrow$ Existe a decomposição $A = LL^T$ de Cholesky, onde L tem todas as entradas da diagonal principal > 0.

Observe que se $A = LDU$ e A é simétrica, então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A = LDU$$
$$\parallel$$
$$U^T D L^T$$

Pela unicidade da decomposição LDU de uma ~~matriz~~ matriz inversível, $U = L^T$.

Logo $A = LDL^T$. Se todos os elementos da diagonal principal de D são > 0, então

$$A = L \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix} L^T$$

$$= \tilde{L} \, \tilde{L}^T$$

onde $\tilde{L} = L \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

~~De feito: se $A = LU$~~

~~L normalizada~~

Note que

$$x^T A x = x^T L^T L x = \|Lx\|^2$$

Como L é ~~...~~ inversível, $Lx \neq 0$ para $x \neq 0$. Assim $x^T A x > 0$ para todo $x \neq 0$.

p1/

Na verdade, é possível saber se A é positiva definida já com a decomposição LU:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_2 & A_{22} \end{bmatrix} = \cancel{L_{11}U_{11}} = LU$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{12}U_{11} & L_{12}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = L_{11}U_{11}$$

$$\det(A_{11}) = \det(U_{11}) = \prod_{i=1}^{k} u_{ii}$$

Assim, se todos os elementos da diagonal de U são >0, então A é positiva definida.

Este resultado não é válido para a decomposição ~~[illegible]~~ PA=LU

A é positiva definida ⇒ A é inversível e aplicando ~~os~~ aos vetores for the quantities u_{sk} with $1 \leqq s \leqq k-1$. These elements lie in the kth column of U. Since U_{k-1} is nonsingular, we can solve the system

$$\sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks} u_{sj} = a_{kj} \qquad (1 \leqq j \leqq k-1)$$

for ℓ_{ks} with $1 \leqq s \leqq k-1$. These elements lie in the kth row of L. From the requirement

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks} u_{sk} = \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks} u_{sk} + \ell_{kk} u_{kk}$$

we can obtain u_{kk} since ℓ_{kk} has been specified as unity. Thus, all the new elements necessary to form L_k and U_k have been defined. The induction is completed by noting that $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ and, therefore, $\ell_{11} = 1$ and $u_{11} = a_{11}$. ∎

Cholesky Factorization

As mentioned earlier in this section, a matrix factorization that is useful in some situations has been given the name of the mathematician André Louis Cholesky, who proved the following result:

THEOREM 2 *If A is a real, symmetric, and positive definite matrix, then it has a unique factorization, $A = LL^T$, in which L is lower triangular with a positive diagonal.*

Proof Recall that a matrix A is *symmetric and positive definite* if $A = A^T$ and $x^T A x > 0$ for every nonzero vector x. It follows at once that A is nonsingular, for A obviously cannot map any nonzero vector into zero. Moreover, by considering special vectors of the form $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)^T$, we see that the leading principal minors of A are also positive definite. Theorem 1 implies that A has an LU decomposition. By the symmetry of A, we then have

$$LU = A = A^T = U^T L^T$$

This implies that

$$U(L^T)^{-1} = L^{-1} U^T$$

The left member of this equation is upper triangular, while the right member is lower triangular. (See Problem 1.) Consequently, there is a diagonal matrix D such that $U(L^T)^{-1} = D$. Hence, $U = DL^T$ and $A = LDL^T$. By Problem 27, D is positive definite, and thus its elements d_{ii} are positive. Denoting by $D^{1/2}$ the diagonal matrix whose diagonal elements are $\sqrt{d_{ii}}$, we have $A = \widetilde{L}\widetilde{L}^T$ where $\widetilde{L} \equiv LD^{1/2}$, which is the Cholesky factorization. The proof of uniqueness is left as a problem. ∎

The algorithm for the Cholesky factorization is a special case of the general LU-factorization algorithm. If A is real, symmetric, and positive definite then by Theorem 2 it has a unique factorization of the form $A = LL^T$, in which L is lower triangular and has positive diagonal. Thus, in Equation (8), $U = L^T$. In the kth step of the general algorithm, the diagonal entry is computed by

$$\ell_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2 \right)^{1/2} \tag{13}$$