ORTOGONALIDADE AULA 5

DEFINIÇÃO Seja $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Dizemos que $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ é um produto interno se

(P1) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$, $\forall u, v, w \in V$

(P2) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in V$

(P3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

(P4) $\langle u, u\rangle > 0$, $\forall u \neq 0$.

Se trocássemos (P3) por $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ então por (P4) para todo $v \neq 0$,

$$\langle v, v\rangle > 0 \text{ e } \langle iv, iv\rangle > 0 \Rightarrow \begin{cases} \langle v, v\rangle > 0 \\ i^2 \langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle < 0 \end{cases}$$

uma contradição.

$\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\langle z_1, z_2\rangle = \cancel{\overline{z_1 z_2}}\; z_1 z_2$

satisfaz (P1), (P2)

Mas $\langle z, z\rangle$ pode não ser um número real

i

> 0	< 0
$i > 0$	$i < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$i^2 > i0$	$-i > 0$
$\parallel$	$\Downarrow$
$-1 > 0$	$(-i)(-i) > (-i)0$
absurdo	$i^2 > 0$
	$-1 > 0$

Não existe uma ordem em $\mathbb{C}$ que satisfaça ao mesmo tempo

(1) $a \leq a$

(2) $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(3) $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$

(4) $\forall a, b$ ~~...~~ $a \leq b$ ou $a \geq b$

(5) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(6) $a \leq b$ e $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

(7) $\leq$ preserve a ordem dos reais

PROPRIEDADES

- $\langle 0,v\rangle = \langle v,0\rangle = 0$

  De fato: $\langle 0,v\rangle = \langle 0\cdot 0, v\rangle = 0\,\langle 0,v\rangle = 0$

- $\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$

  De fato: $\langle u, v+w\rangle = \overline{\langle v+w,u\rangle}$
  $$= \overline{\langle v,u\rangle + \langle w,u\rangle}$$
  $$= \overline{\langle v,u\rangle} + \overline{\langle w,u\rangle}$$
  $$= \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle.$$

- $\langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0$

  De fato: $(\Leftarrow)$ Segue-se da primeira propriedade

  $(\Rightarrow)$ Segue-se de (P4)

- $\langle u, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u,v\rangle$

EXEMPLOS

- ~~$V = \mathbb{C}^n$~~

  ~~$\langle (z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle = z_1\bar{w} + \dots + z$~~

- $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

  $$\langle u,v\rangle = \langle (u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n)\rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$
  $$= v^T u = [v_1 \dots, v_n]\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

  PRODUTO INTERNO CANÔNICO.

- $V = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

  $$\langle (z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle = z_1\overline{w_1} + \dots + z_n\overline{w_n}.$$

(3) Se $A_{n\times n}$ é simétrica positiva definida, então

$\langle u,v\rangle = v^T A u$

é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

[pois v^TAu é 1×1]

$\langle u,v\rangle = v^T A u = (v^TAu)^T$

$= u^T A^T (v^T)^T$

$= u^T A v$

$= \langle v,u\rangle$

(4) Se $B_{n\times n}$ é uma matriz inversível qualquer, então

$\langle u,v\rangle = v^T B^T B u$

é um produto interno em $\mathbb{R}^n$

(P4): $\langle u,u\rangle = u^T B^T B u$

$= (Bu)^T (Bu)$

p/ $v = Bu$. Se $u \neq 0$, $v = Bu \neq 0$ pois B é inversível

$= [v_1 \ldots, v_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$= v_1^2 + \cdots + v_n^2 > 0$

(5) $V = C([a,b],\mathbb{R})$

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$

• DEFINIÇÃO: Se $(V,\mathbb{K},+,\cdot)$ possui um produto interno $\langle\, ,\, \rangle : V\times V \to \mathbb{K}$, denominamos a função

$\|\ \| : V \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

de norma de V.

• PROPRIEDADES: (1) $\|v\| \geq 0$

(2) $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

(3) $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall v \in V$.

• TEOREMA (DESIGUALDADE DE SCHWARZ)

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| , \quad \forall u, v \in V$$

Mais ainda, a igualdade vale se, e somente se $\{u, v\}$ for LD. Se $u = 0$ ou $v = 0$, a desigualdade é imediata. $v \neq 0$

igualdade

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, e $u, v \in V$, Então

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle &= \alpha\bar{\alpha}\langle u, u\rangle \\ &\quad - \beta\bar{\alpha}\langle v, u\rangle \\ &\quad - \alpha\bar{\beta}\langle u, v\rangle \\ &\quad + \beta\bar{\beta}\langle v, v\rangle \\ &= |\alpha|^2\|u\|^2 \\ &\quad - 2\,\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}\langle u, v\rangle) \\ &\quad + |\beta|^2\langle v, v\rangle . \end{aligned}$$

um é conjugado do outro

~~Escolha $\alpha = \|u\|^2$ e $\beta = \|v\|^2$ Então~~

Escolha $\alpha = \|v\|^2$ e $\beta = \langle u, v\rangle$. Então

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\beta}\langle u, v\rangle &= \|v\|^2 \cancel{\langle u, v\rangle \ldots}\ \beta\bar{\beta} \\ &= \|v\|^2|\beta|^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle &= \|v\|^4\|u\|^2 - 2\|v\|^2|\beta|^2 \\ &\quad + |\langle u, v\rangle|^2\|v\|^2 \\ &= \|v\|^4\|u\|^2 - 2\|v\|^2|\langle u, v\rangle|^2 \\ &\quad + \|v\|^2|\langle u, v\rangle|^2 \\ &= \|v\|^2(\|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u, v\rangle|^2) \end{aligned}$$

Dividindo-se por $\|v\|^2$, vem que $\|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u, v\rangle|^2 \geq 0$

Logo $|\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ e, portanto

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

$v\neq 0$ Se $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$, pela desigualdade acima,

$$\langle \alpha u-\beta v, \alpha u-\beta v\rangle = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha u - \beta v = 0$$
$$\Downarrow \ \alpha = \|v\|\neq 0$$
$$\{u,v\} \text{ é LD}.$$

Por outro lado, se $\{u,v\}$ é LD, então $u=\lambda v$.

Assim,

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda|\,|\langle v,v\rangle| = |\lambda|\,\|v\|^2$$

$$\|u\|\,\|v\| = \|\lambda v\|\,\|v\| = |\lambda|\,\|v\|^2,$$

isto é, $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$. ∎

COROLÁRIO (DESIGUALDADE TRIANGULAR)

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Demonstração:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^2$$
$$= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle) + \|v\|^2$$
$$\left[\ \mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|\ \right]$$
$$\leq \|u\|^2 + 2\,|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2$$
$$\underset{\text{DESIGUALDADE DE SCHWARZ}}{\leq} \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2$$
$$= (\|u\|+\|v\|)^2$$

Logo $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. ∎

DEFINIÇÃO. Seja $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial com produto interno $\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$. Dizemos que dois vetores ~~v, w~~ $w, v \in V$ são ortogonais se $\langle v, w \rangle = 0$. ~~Se $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ e $\langle u, v \rangle = 0$, dizemos que u e v são ortonormais~~. Um conjunto é ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois. Um conjunto é ortonormal se ele é ~~orto~~ ortogonal e, além disto, $\|v\| = 1$, $\forall v \in V$.

EXEMPLOS

(1) $\{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\}$ é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$

(2) ~~$A = \{f_n \in C([a,b])$~~

$A = \{ f_n \in \mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R}) \mid f_n(x) = \cos(nx), n \in \mathbb{N} \}$

é um conjunto ortogonal em $C([a,b], \mathbb{R})$

pois

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = n = 0 \end{cases}$$

$\cos^2(a) = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$ $\qquad$ $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

Assim, $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e $e_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}}$ para $n = 1, \ldots$ formam um subconjunto ortonormal infinito de V

PROPOSIÇÃO Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja A um subconjunto ortogonal de V formado por vetores não nulos.

(a) Se $v \in [v_1, \ldots, v_k]$, com $v_i \in A$, então

$$v = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

(b) A é LI.

Demonstração (a) $v \in [v_1, \ldots, v_k)$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow \langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{ij}}$$

$$= \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$$

$$= \alpha_j \|v_j\|^2$$

Logo $\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$ e, portanto,

$$v = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j$$

(b) $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j \rangle = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = 0$

$\Rightarrow \alpha_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\|v_j\|^2 \neq 0} = 0$

$\Rightarrow \alpha_j = 0, \forall j = 1, \dots, k.$ ∎

$\tilde{w}_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, w_j \rangle w_j$

$w_i = \frac{\tilde{w}_i}{\|\tilde{w}_i\|}$

$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, w_j \rangle w_j + \|\tilde{w}_i\| w_i$

$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \|\tilde{w}_1\| & \langle v_2, w_1 \rangle \\ & \|\tilde{w}_2\| \end{bmatrix}$

COROLÁRIO Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V e $v \in V$, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i .$$

O PROCESSO DE ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

TEOREMA Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI de um espaço vetorial V com produto interno. Para cada $i = 1, \dots, k$, defina

$$w_i = \frac{v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, w_j \rangle w_j}{\left\| v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, w_j \rangle w_j \right\|}$$

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$w_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1\|}$

$w_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2}{\|v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2\|}$

Então $\{w_1,\dots,w_k\}$ é ortonormal (e, em particular LI) e

$$[w_1]=[v_1]$$
$$[w_1,w_2]=[v_1,v_2]$$
$$\vdots$$
$$[w_1,\dots,w_k]=[v_1,\dots,v_k]$$

Demonstração: vamos fazer a demonstração por indução. O caso $k=1$ é imediato. Suponha que obtivemos vetores $\{w_1,\dots,w_r\}$ ~~tais~~ ortonormais tais que

$$[w_1]=[v_1]$$
$$\vdots$$
$$[w_1,\dots,w_r]=[v_1,\dots,v_r].$$

$\tilde{w}_{r+1}$

Seja
$$w_{r+1}=\frac{v_{r+1}-\sum_{j=1}^{r}\langle v_{r+1},w_j\rangle w_j}{\left\|v_{r+1}-\sum_{j=1}^{r}\langle v_{r+1},w_j\rangle w_j\right\|}$$

Note que

(1) $\cancel{\|w_{r+1}\|=1}$ $\tilde{w}_{r+1}\neq 0$ pois $v_{r+1}\notin [v_1,\dots,v_r]$ $= [w_1,\dots,w_r]$ e $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1}\}$ é LI.

(2) $\|w_{r+1}\|=1$.

(3) $\{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}\}$ é ortogonal pois para todo $s \leq r$,

$$\cancel{\langle v_{r+1}, w_s\rangle} \quad \langle w_{r+1}, w_s\rangle = \frac{\langle v_{r+1}, w_s\rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle v_{r+1}, w_j\rangle \langle w_j, w_s\rangle}{\| * \|}$$

$$= \frac{\langle v_{r+1}, w_s\rangle - \langle v_{r+1}, w_s\rangle}{\| * \|}$$

$$= 0 .$$

(4) $[w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}] = [v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}]$

Pela definição de w_{r+1}, segue-se que

$$w_{r+1} \in [w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}]$$

$$= [v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}].$$

Logo $[w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}] \subset [v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}]$

Como $\dim([w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}])$ ~~ortonormados~~ ortonormais não-nulos, logo LI $=$

$$\dim([v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}])$$

segue-se que $[w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}] =$
$[v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}]$.

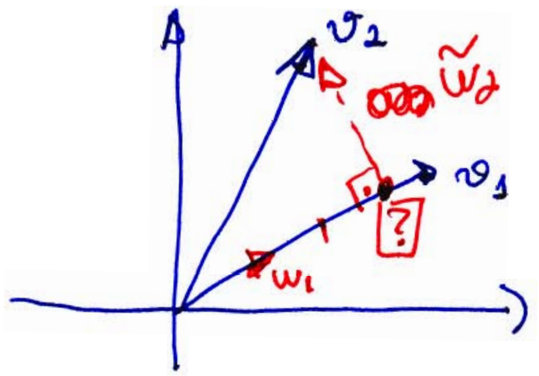
■

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$w_2 = \cancel{w_1} \frac{v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\|}$$

$$w_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2}{\|v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2\|}$$

EM $\mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} \boxed{?} = \alpha w_1 \\ \langle v_2 - \boxed{?}, w_1 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle v_2 - \alpha w_1, w_1 \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle v_2, w_1\rangle - \alpha \langle w_1, w_1\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \langle v_2, w_1\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{?} = \langle v_2, w_1\rangle w_1$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1$$

$$\Downarrow$$

$$w_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\|}$$

$\boxed{?}$

$$\begin{cases} \boxed{?} = \alpha w_1 \\ \langle v_2 - \boxed{?}, w_1 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle v_2 - \alpha w_1, w_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \langle v_2, w_1 \rangle \Rightarrow \boxed{?} = \langle v_2, w_1\rangle w_1$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1.$$

COROLÁRIO Todo espaço vetorial de dimensão finita com produto interno possui uma base ortonormal.

EXEMPLO $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{w_2 = \frac{v_2 - (v_2^T w_1) w_1}{\|v_2 - (v_2^T w_1) w_1\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - (v_2^T w_1) w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{2/\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = v_3 - (v_3^T w_1) w_1 - (v_3^T w_2) w_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

- Note que $\cancel{M^T M} = I$
  $M^T M$

Logo $Q^T = Q^{-1}$. Então
$Q Q^{-1} = I$
$Q Q^T$

- FATO: $Q^T A = R \Rightarrow A = QR$ ↳ triangular superior!

$(W^T)^{-1} = W$ já que W é ortogonal

~~De fato:~~ $\cancel{\begin{bmatrix} q_1 & q \end{bmatrix}}$

$$\cancel{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}}$$

- $Q = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$

- $Q^T Q = I$ pois $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q é uma matriz ortogonal.

- Note que, neste caso, $Q^{-1} = Q^T$, logo

$$\boxed{Q Q^T = Q Q^{-1} = I.}$$

Em particular, $\det(QQ^T) = \det(I)$

$\det(Q)^2 = 1$

$\det(Q) = \pm 1$

- $Q^T A = R \Rightarrow A = QR$

Fato: R é uma matriz triangular superior inversível

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

↳ só precisa de w_1

↳ só precisa de w_1 e w_2

↳ só precisa de w_1, w_2, w_3

(DECOMPOSIÇÃO QR) diagonal principal de $R > 0$

PROPOSIÇÃO Seja Q uma matriz ortogonal, isto é, $Q^TQ=I$. Então

(1) $Q^{-1}=Q^T$

(2) Q^{-1} é ortogonal

(3) $\det(Q)=1$ ou $\det(Q)=-1$

Prova: $QQ^{-1}=I \Rightarrow QQ^T=I \Rightarrow (Q^T)^TQ^T=I \Rightarrow (Q^{-1})^TQ^{-1}=I$

A recíproca é falsa! $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ é um ~~contraexemplo~~ contra-exemplo

PROPOSIÇÃO O produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal.

PROPOSIÇÃO: As seguintes sentenças são equivalentes

(1) Q é ortogonal

(2) $\|Qv\|=\|v\|$, $\forall v\in\mathbb{R}^n$ (preserva norma)

(3) $\|Qu-Qv\|=\|u-v\|$ (preserva distância)

(4) $\langle Qu,Qv\rangle=\langle u,v\rangle$ (preserva produto interno)

(PRODUTO INTERNO CANÔNICO)

(5) Se $\{u_1,\dots,u_n\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, então $\{Qu_1,\dots,Qu_n\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^n$

Demonstração: Pela identidade de polarização:

(3) $\Rightarrow$ (4) $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2$

Assim

$$u^TQ^TQv=\langle Qu,Qv\rangle=\frac{1}{4}\|Qu+Qv\|^2-\frac{1}{4}\|Qu-Qv\|^2$$
$$=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2=\langle u,v\rangle=u^Tv$$

Desta maneira, $\langle u, v\rangle = v^T u$

$(4) \Rightarrow (1)$

$$(Q^T Q)_{ij} = e_i^T Q^T Q e_j$$

$$= e_i^T e_j = \delta_{ij}$$

Então $Q^T Q = I$. Isto mostra que

$$(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$$

As demais implicações ficam como exercício.

$(5) \Rightarrow (1)$ Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Como $\{Qe_i\}$ é ortonormal

$\langle Qe_j, Qe_i\rangle = \delta_{ij}$

$\langle Qe_j, Qe_i\rangle = e_i^T Q^T Q e_j = (Q^T Q)_{ij}$

Logo $Q^T Q = I$.

PROPOSIÇÃO: Se A inversível possui uma decomposição QR, com elementos da diagonal principal de $R > 0$, então esta decomposição é única.

Demonstração $A = QR = \tilde{Q}\tilde{R}$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\tilde{Q}^{-1} Q}_{\text{ortogonal como produto de ortogonais}} = \underbrace{\tilde{R} R^{-1}}_{\text{triangular superior}}$$

$\neq 0$

$$\tilde{Q}^{-1} Q : \begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \times \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

produto interno zero, logo $(\tilde{Q}^{-1} Q)_{12} = 0$.

Isto implica que $\tilde{Q}^{-1}Q = \tilde{R}R^{-1}$ é uma matriz diagonal. Como ~~todos elementos~~ as colunas de $\tilde{Q}^{-1}Q$ deve ter norma 1 seus elementos são +1 ou -1. Eles devem ser +1 pois as entradas de R e $\tilde{R}$ são positivas.
Segue-se que $\tilde{Q}^{-1}Q = \tilde{R}R^{-1} = I$.

Logo $\tilde{Q} = Q$ e $\tilde{R} = R$. ∎

$$\tilde{w}_k = v_k - \sum_{r=1}^{k-1} \langle v_k, w_r \rangle w_r$$

$$w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$

$$\tilde{w}_1 = v_1, \quad w_1 = \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{v_1}{\|\tilde{w}_1\|} \Rightarrow v_1 = w_1 \|\tilde{w}_1\|$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} \Rightarrow v_2 = \langle v_2, w_1 \rangle w_1 + w_2 \|\tilde{w}_2\|$$

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$$

$$w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} \Rightarrow v_3 = \langle v_3, w_1 \rangle w_1 + \langle v_3, w_2 \rangle w_2 + w_3 \|\tilde{w}_3\|$$

$$\langle v_j, w_j \rangle = \|\tilde{w}_j\|$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} \|\tilde{w}_1\| & \langle v_2, w_1 \rangle & \cdots \\ 0 & \|\tilde{w}_2\| & \cdots \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$