AULA 6

SUBESPAÇO ORTOGONAL

DEFINIÇÃO: ~~Seja W um subespaço vetorial de V~~
Seja S um subconjunto (não necessariamente um subespaço ~~vetorial~~ vetorial) de um espaço vetorial com produto interno. O conjunto ortogonal a S é

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \langle s, v \rangle = 0, \forall s \in S\}$$

OBSERVAÇÕES

- $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V (mesmo que S não o seja)
- $\{0\}^{\perp} = V$
- $V^{\perp} = \{0\}$.
- Se $\mathcal{B}$ é uma base de V, então $\mathcal{B}^{\perp} = \{0\}$.

PROPOSIÇÃO (H) V espaço vetorial com produto interno
W subespaço de V
$W = [w_1, \dots, w_k]$.
(T) $v \in W^{\perp} \iff \langle v, w_i \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, k.$

~~PROPOSIÇÃO (H) V espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com pro~~

PROPOSIÇÃO (H) V espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, com produto interno

W subespaço vetorial de V

(T) $V = W \oplus W^{\perp}$

Demonstração Seja B_W ~~uma base~~ $= \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k\}$ uma base de W ~~e completá-a para obter uma base de V:~~

$$\cancel{B_V = \{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_{n-k}\}}$$

Pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmitt, existe conjunto ortonormal $\{w_1, \dots, w_k\}$ tal que

$$W = [w_1, \dots, w_k].$$

Complete a base $\{w_1, \dots, w_k\}$ para obter uma base de V: $\{w_1, \dots, w_k, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n-k}\}$. Novamente pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, existe conjunto ortonormal ~~B~~ $\{u_1, \dots, u_{n-k}\}$ ~~tal que~~

$$\cancel{[\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n-k}] = [u_1, \dots, u_{n-k}]}.$$

Afirmamos que $[u_1, \dots, u_{n-k}] = W^{\perp}$

$\{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_{n-k}\}$ que é base de V.

Se $v \in V$, então
$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle w_i}_{\in W} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-k} \langle v, u_j \rangle u_j}_{\in W^{+} \text{ pois é perpendicular a cada } w_i}$$

Isto mostra que $V = W + W^{\perp}$. Agora, se $v \in W \cap W^{\perp}$, então $v \perp v$, isto é, $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 0$. Logo $v = 0$. ∎

COROLÁRIO (H) V espaço vetorial de dimensão finita com produto interno

(H) W subespaço vetorial de V.

(T) $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.