AULA 7

AINDA SOBRE ORTOGONALIDADE

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA LINEAR.

- $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

conhecida como adjunta!

$A^T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\qquad A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

$Ker(A)$ em $\mathbb{R}^n$ $\qquad$ (→ núcleo à esquerda.) $Ker(A^T)$ em $\mathbb{R}^m$

$Im(A) = \mathcal{C}(A)$ em $\mathbb{R}^m$ $\qquad Im(A^T) = \mathcal{R}(A)$ em $\mathbb{R}^n$

- Se $\dim(Ker(A)) = r$, então

(1) $\dim(Im(A)) = \dim(\mathcal{C}(A)) = n - r$, (TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM)

(2) $\dim(Im(A^T)) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(Im(A)) = n - r$

↳ POSTO LINHA = POSTO COLUNA

$T: U \to V$

$\dim U = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$

$n = r - \ldots$

(3) $\dim(Ker(A^T)) = m - \dim Im(A^T) = m - n + r.$

$(\,1\ 0\ 0\,)_{1\times 3}$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$n = 3 \qquad m = 1.$

$\cancel{r = 1}$

$1 - 3 + 1$

PARTE 1

- Se $\dim Im(A) = \dim(\mathcal{C}(A)) = r$, então (→ posto)

(1) $\dim(Ker(A)) = n - r$

↳ TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM.

(2) $\dim(\mathrm{Im}(A^T))$
$$\| $$
$\dim(\mathcal{R}(A))$
$$\| $$
$\dim \mathcal{C}(A) = r.$

(3) $\dim(\ker(A^T)) = m - \dim(\mathrm{Im}(A^T))$

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM

$= m - r.$

EXEMPLO

$A = [1\ 0\ 0]$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$m = 1$
$n = 3$
$\cancel{\dim(\ker(A)) = 2}$
$r = 1 = \dim(\mathrm{Im}(A))$

$\dim(\ker(A^T)) = 0$

PARTE 2

- $\ker(A) = (\mathcal{R}(A))^{\perp} = (\mathcal{C}(A^T))^{\perp} = (\mathrm{Im}(A^T))^{\perp}$
- $\ker(A^T) = (\mathcal{C}(A))^{\perp} = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$

Demonstração: $\dim \ker(A) = n - r$
$\dim \mathrm{Im}(A^T) = r$
$\dim (\mathrm{Im}(A^T))^{\perp} = n - r$

mesma dimensão!

$\ker(A) \subseteq (\mathrm{Im}(A^T))^{\perp}$. De fato.

$x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x^T A^T = 0$
$\Rightarrow x^T A^T y = 0, \forall y \in \mathbb{R}^m$
$\Rightarrow \langle x, A^T y \rangle = 0, \forall y \in \mathbb{R}^m$
$\Rightarrow x \in (\mathrm{Im}(A^T))^{\perp}$

Como $Ker(A) \subset (Im(A^T))^\perp$ e $\dim(Ker(A)) = \dim(Im(A^T))^\perp$,
segue-se que $Ker(A) = (Im(A^T))^\perp$.

Agora

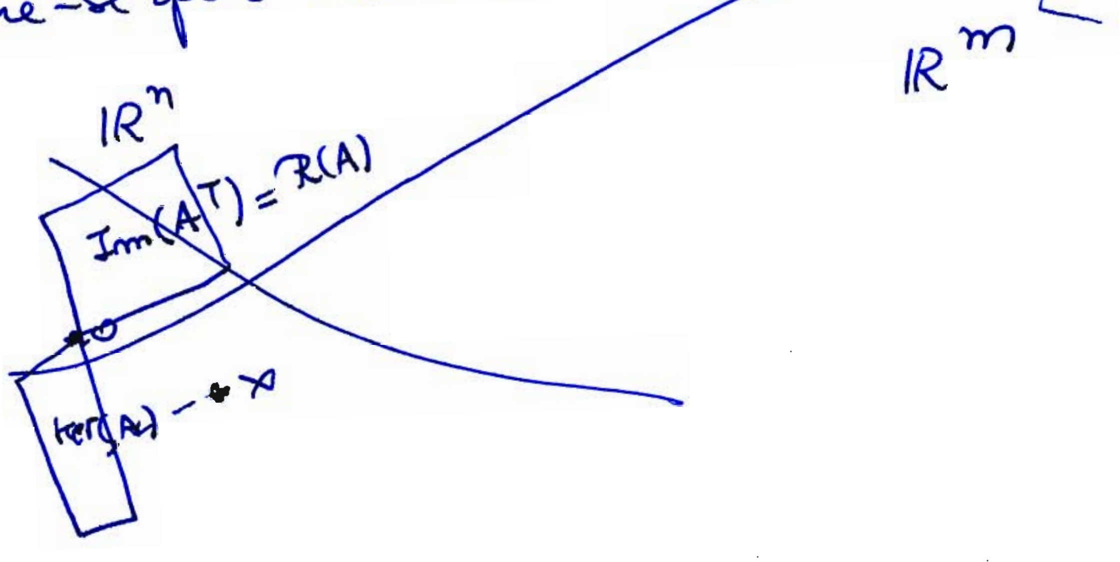
$$\left.\begin{array}{l} \dim Ker(A^T) = m - r \\ \dim Im(A) = r \\ \dim(Im(A))^\perp = \cancel{m}\, m - r. \end{array}\right\} \text{mesma dimensão}$$

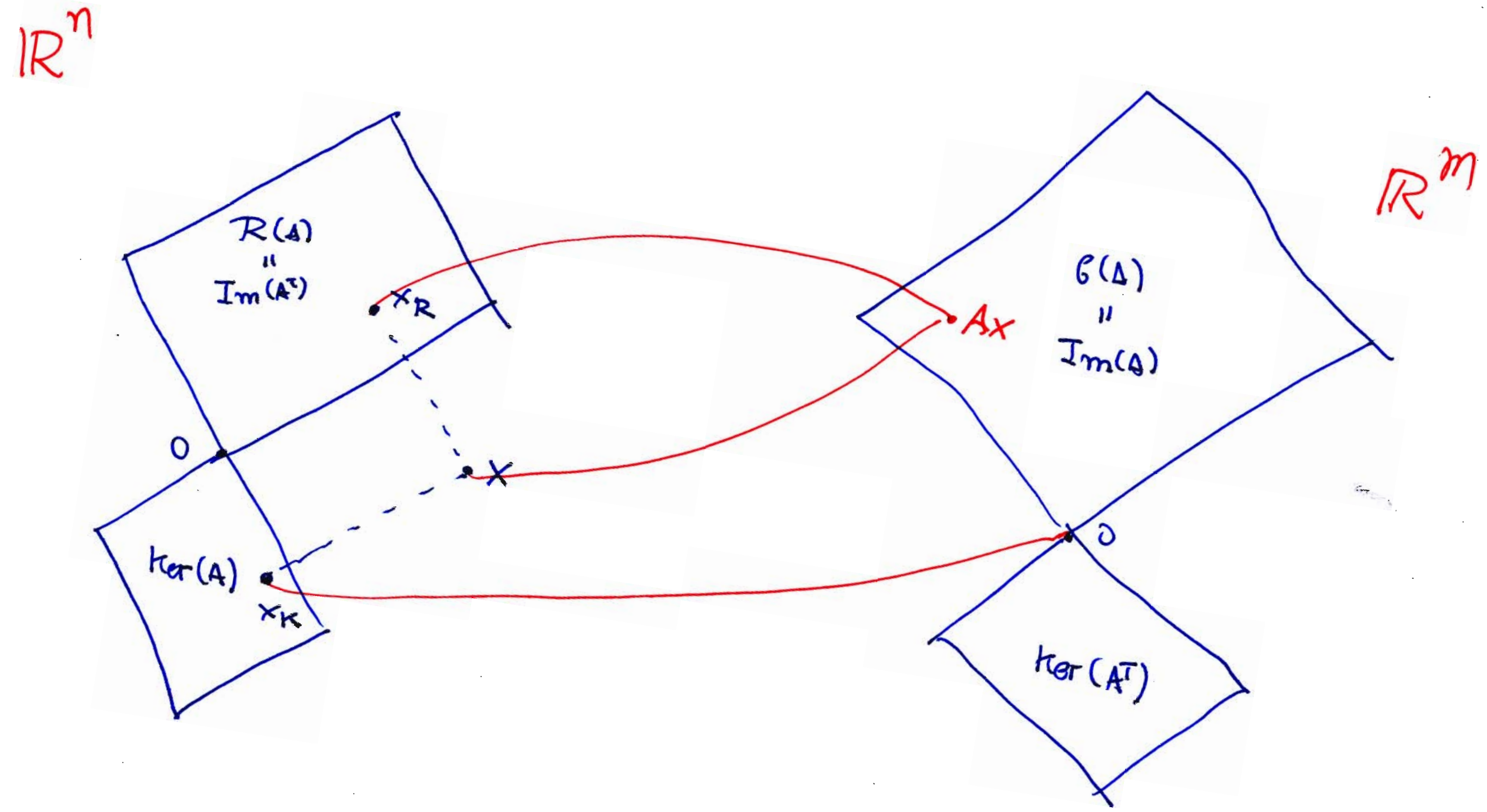
$Ker(A^T) \subseteq (Im(A))^\perp$. De fato:

$$y \in Ker(A^T) \Rightarrow A^T y = 0 \Rightarrow y^T A = 0$$
$$\Rightarrow y^T A x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow \langle y, Ax \rangle = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow y \in (Im(A))^\perp.$$

Como $Ker(A^T) \subseteq (Im(A))^\perp$ e $\dim(Ker(A^T)) = \dim((Im(A))^\perp)$

segue-se que $Ker(A^T) = (Im(A))^\perp$.




$\mathbb{R}^n$
$\mathcal{R}(A)$
$=$
$Im(A^T)$
x_R
0
x
$Ker(A)$
x_K
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{C}(A)$
$=$
$Im(A)$
Ax
0
$Ker(A^T)$

PROPOSIÇÃO Seja W um subespaço ~~próprio~~ de dimensão finita de um espaço vetorial V com produto interno. Se $v \in V$, então existe um único $\tilde{w} \in W$ que minimiza

$$\|v - w\|^2$$

~~De fato,~~ $\tilde{w}$ é denominado a projeção ortogonal de v em W. Mais ainda, $v - \tilde{w} \in W^{\perp}$

Demonstração - Se $v \in W$, então $\tilde{w} = v$ e

$$\|v - w\|^2 = \|v - v\| = 0.$$

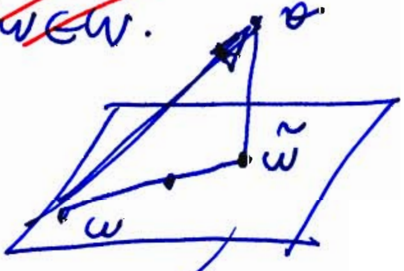
Suponha então $v \notin W$. Seja $\{w_1, \ldots, w_k\}$ base ortonormal de W. Defina

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle w_i$$

$v - \tilde{w} \in W^{\perp}$.

Afirmamos que

$$\cancel{\|v - w\| \geq \|v - \tilde{w}\| \quad \forall w \in W.}$$



Com efeito:

$$\cancel{\|v - w\|^2 = \|v\|^2}$$

$$\cancel{\|v - \tilde{w}\| = \|v - \tilde{w}\|}$$

$$\cancel{\|v - \tilde{w}\| \leq \|v - w\| + \|w - \tilde{w}\|}$$

Note que $\cancel{\langle v - \tilde{w}, \ldots \rangle = 0}$ ~~pois~~ $v - \tilde{w} \in W^{\perp}$

$$\cancel{\langle v - \tilde{w}, \tilde{w} - w \rangle =}$$

pois $\langle v - \tilde{w}, w_i \rangle = \langle v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j, w_i \rangle$

$$= \langle v, w_i \rangle - \langle v, w_i \rangle = 0$$

Assim,

$$\cancel{\|v-\tilde{w}\|^2 =}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

$$\|v-w\|^2 = \|v-\underbrace{\tilde{w}}_{\in W^\perp} + \underbrace{\tilde{w}-w}_{\in W}\|^2$$

$$= \|v-\tilde{w}\|^2 + \|\tilde{w}-w\|^2$$

$$\geq \|v-\tilde{w}\|^2.$$

$(= \langle v-\tilde{w}+\tilde{w}-w,\ v-\tilde{w}+\tilde{w}-w \rangle$

$= \langle v-\tilde{w}, v-\tilde{w}\rangle$

$+$

$\langle \tilde{w}-w, v-$

$\langle v-w,$

$\langle \tilde{w}-w,$

$\tilde{w}-w)$

~~Então~~ Da igualdade acima, segue-se que

$$\tilde{w} = w \iff \|v-w\| = \|v-\tilde{w}\|$$

$\blacksquare$

PROJEÇÕES E O MÉTODO DOS ~~MI~~ QUADRADOS MÍNIMOS

PARA SISTEMAS SEM SOLUÇÃO!

$$\begin{cases} 2x = b_1 \\ 3x = b_2 \\ 4x = b_3 \end{cases}$$ tem solução $\iff b_1 : b_2 : b_3$ ~~ambos~~ $= 2 : 3 : 4.$

$$f(x) = (2x-b_1)^2 + (3x-b_2)^2 + (4x-b_3)^2$$

$$f'(x) = 2(2x-b_1)2 + 2(3x-b_2)\cdot 3 + 2(4x-b_3)4 = 0$$

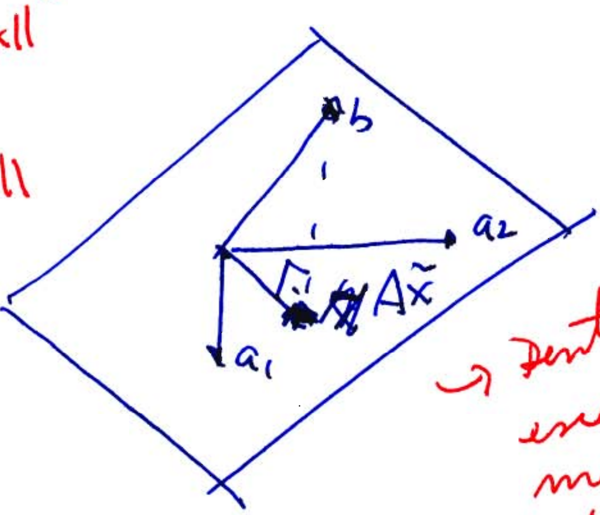
$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{\cancel{2^2+3^2+4^2}\ \ 2^2+3^2+4^2}.$$

$$Ax = b$$

$$\min_{x} \|b - Ax\|^2$$

$$\min_{w \in Im(A)} \|b - w\|$$



→ Dentre a imagem de A, escolher o elemento mais ~~prox~~ próximo de b.

$b - A\tilde{x}$ é perpendicular as colunas de A.

$\langle a_1, b - A\tilde{x} \rangle = 0$

$\vdots$

$\langle a_m, b - A\tilde{x} \rangle = 0$

$$A^T(b - A\tilde{x}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A^T A \tilde{x} = A^T b}$$

Equações normais.

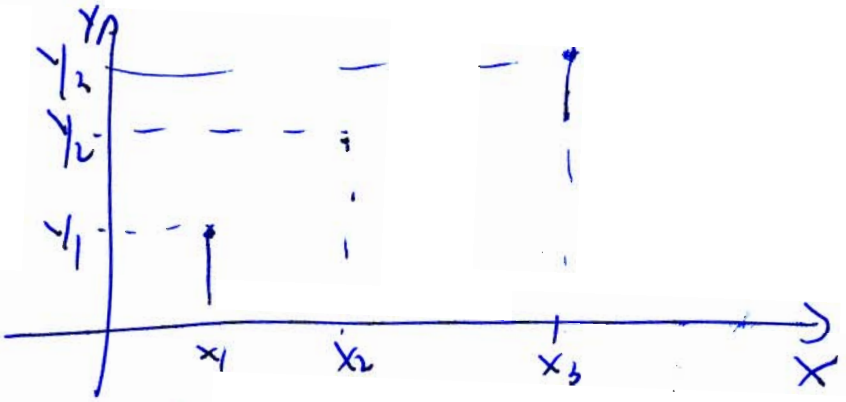
Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = 6 \end{cases}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

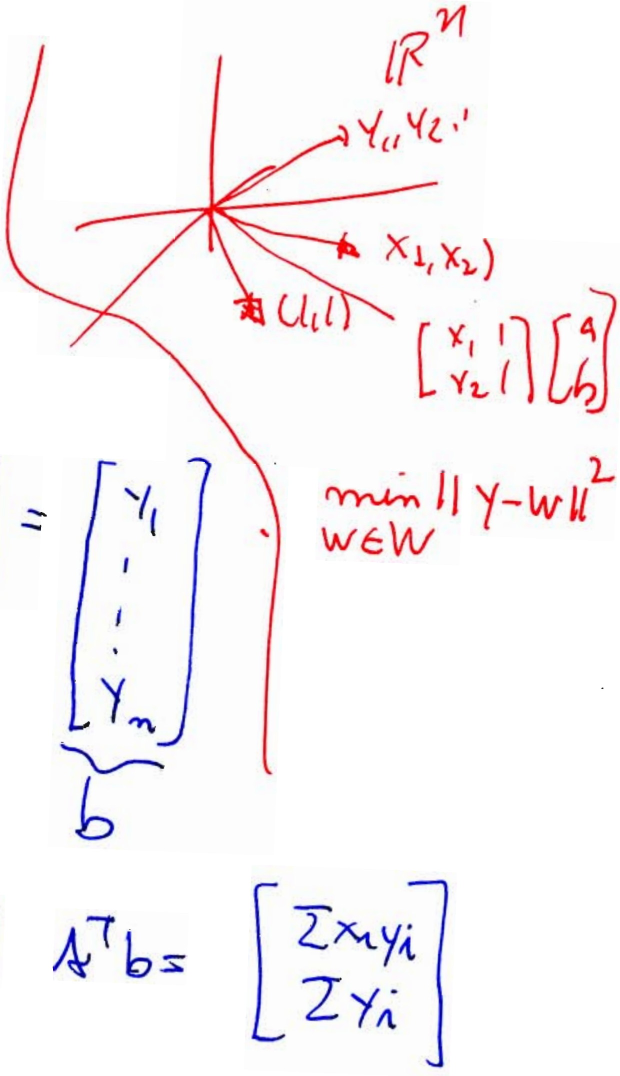
$$\tilde{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO



$$y = \overset{?}{a}x + \overset{?}{b}$$

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ \vdots \\ ax_n + b = y_n \end{cases}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{b}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \cancel{1}n \end{bmatrix} \quad A^Tb = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

OBSERVAÇÃO

CORRIGIR RESPOSTA (20) LISTA 2

TRAZER OCTAVE PARA LAURA!

- $W = \mathcal{C}(A)$

$$\hat{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|b - Ax\|^2 = (A^TA)^{-1}(A^Tb)$$

Logo, o elemento de $W = \mathcal{C}(A)$ mais próximo de b

é $A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^Tb}_{\hat{x}}$. Assim

para calcular um ponto na imagem

$$Pr_{\mathcal{C}(A)} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}(A)$$
$$b \mapsto Pr_{\mathcal{C}(A)}(b) = Mb.$$

onde $M = A(A^TA)^{-1}A^T$

- Note que $M^2 = M$.

De fato: $M^2 = M \cdot M = A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^TA(A^TA)^{-1}}A^T$

$$= A(A^TA)^{-1}A^T$$
$$= \cancel{A}M$$

$$M^T = M$$

De fato $M^T = (A^T)^T\left((A^TA)^{-1}\right)^TA^T$

$$= A\left((A^TA)^T\right)^{-1}A^T$$
$$= A(A^TA)^{-1}A^T$$

$(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$

pois

$BB^{-1} = I$

$\Downarrow$

$(B^{-1})^TB^T = I$

$\Downarrow$

$(B^T)^{-1}\cancel{I} = \cancel{B^T}$ $(B^{-1})^T$

Será que toda ~~matriz~~ ~~matriz~~ matriz P que satisfaz estas propriedades é uma projeção?

PROPOSIÇÃO Seja P uma matriz simétrica com $P^2=P$. Então P representa uma projeção.

Demonstração seja $W = Im(P) = \mathcal{C}(P)$. ~~Afirmamos~~

Afirmamos que a projeção em $W = \mathcal{C}(B)$

$$Pr_{\mathcal{C}(P)} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}(P)$$
$$x \mapsto Pr_{\mathcal{C}(P)}(x)$$

é tal que $Pr_{\mathcal{C}(P)}(x) = Px$. De fato: temos que se $Pr_{\mathcal{C}(P)}(x) = Mx$, então

$$M = P(P^TP)^{-1}P^T$$
$$= P(PP)^{-1}P$$

↳ não é possível usar esta trilha pois P pode não ~~tem~~ ser tal que P^TP é inversível.

Tome, por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$P^2 = P$, $P^T = P$ mas P^TP não é inversível.

OUTRA TRILHA

~~Afirmamos que P é a matriz~~

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$b \mapsto T(b) = Pb$

Afirmamos que T é a projeção de $b \in \mathbb{R}^n$ no subespaço vetorial $W = \mathcal{C}(P)$. De fato: basta mostrar que $b - Pb$ é ortogonal a $\mathcal{C}(P)$; ~~isto é, que $P^T(b - Pb) = 0$. Agora:~~

$$\cancel{P^T(b - Pb) = P^Tb - Pb =}$$

ou também

$P^T(b-Pb)$

$= P^Tb - P^TPb$

$= P^Tb$

$= P^2b$

$= Pb$

$- Pb$

$= 0.$

isto é, $\forall y \in \mathcal{C}(P)$, $(b - Pb)^T y = 0$. Mas se $y \in \mathcal{C}(P)$, então $y = Pc$, para algum $c \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\begin{aligned}
(b - Pb)^T y &= (b - Pb)^T Pc \\
&= (b^T - b^T P^T) Pc \\
&= (b^T - b^T P) Pc \\
&= b^T Pc - b^T P^2 c \\
&= b^T Pc - b^T Pc \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P^T(b - Pb) \\
&= P^Tb - P^TPb \\
&= Pb - P^2b \\
&= Pb - Pb \\
&= 0
\end{aligned}$$

• OBSERVAÇÃO

logo $n < m$

Toda matriz $m \times n$ A com colunas linearmente independentes pode ser fatorada na forma $A = QR$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix}_{m\times n}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \; & \cdots & \; \end{bmatrix}}_{Q}{}_{m\times n} \begin{bmatrix} \nabla \end{bmatrix} R_{n\times n}$$

As colunas de Q são ortonormais e R é uma matriz triangular superior inversível.

Na decomposição LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ * & \ddots & & \\ * & & & \\ * & & & 1 \end{bmatrix}}_{m\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \\ x & x \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = L\,U$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ x & 1 & \boxed{0} \\ x & x & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \\ \boxed{0 \;\; 0} \end{bmatrix}$$

X APAGAR

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 U_1 \\ L_2 U_1 \end{bmatrix}$$

De composição LU reduzida!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 2}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 2}}_{U}$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} U_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}_{4\times 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

ORTOGONALIZAÇÃO SIMPLIFICA O PROBLEMA DOS QUADRADOS MÍNIMOS

Se $A = QR$, então as equações normais ficam assim:

→ inversível se as colunas de A são LI

$$A^T A x = A^T b \Rightarrow (QR)^T QR x = (QR)^T b$$

$$\Rightarrow R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R x = R^T Q^T b$$

$$\Rightarrow R^T R x = R^T Q^T b$$

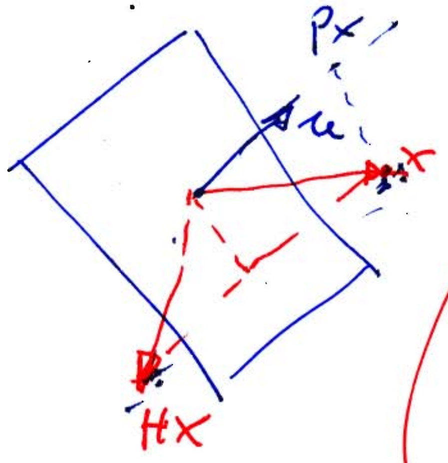
R^T é inversível

$$\Rightarrow R x = Q^T b$$

TRANSFORMAÇÕES DE HOUSEHOLDER

$H = I - 2uu^T$, com $\|u\| = 1$.

↳ Reflexão com relação ao hiperplano $\{u\}^\perp$



PROJETAR EM u

$Px = \langle x, u\rangle u$

$\langle u, v\rangle = v^T u$

$$
\begin{aligned}
Hx &= x - 2Px \\
&= x - 2\langle x, u\rangle u \\
&= \cancel{x - 2\,\frac{x^T u\, u}{u^T u}} \\
&= x - 2\,\underbrace{u^T x}_{\text{número real}}\,u \\
&= x - 2uu^Tx \\
&= (I - 2uu^T)x.
\end{aligned}
$$

↳ é ~~ortogonal~~ ortogonal

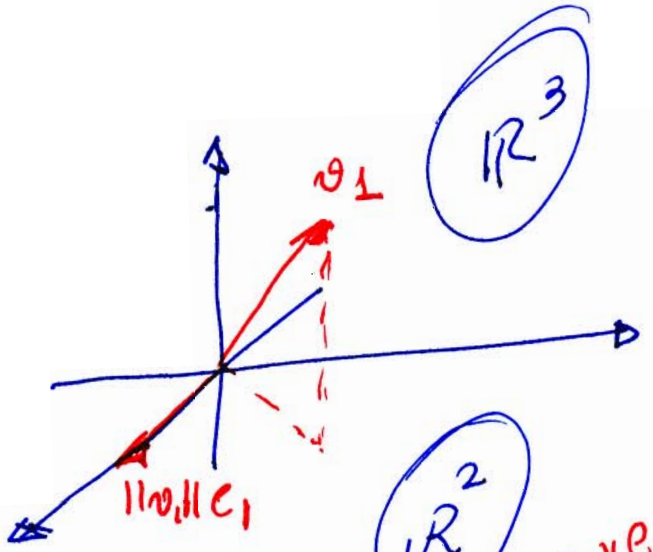
$$
\begin{aligned}
H^T H &= (I - 2uu^T)^T (I - 2uu^T) \\
&= (I - 2uu^T)(I - 2uu^T) \\
&= I - 2uu^T - 2uu^T + 4u\underbrace{u^T u}_{1}u^T \\
&= I.
\end{aligned}
$$

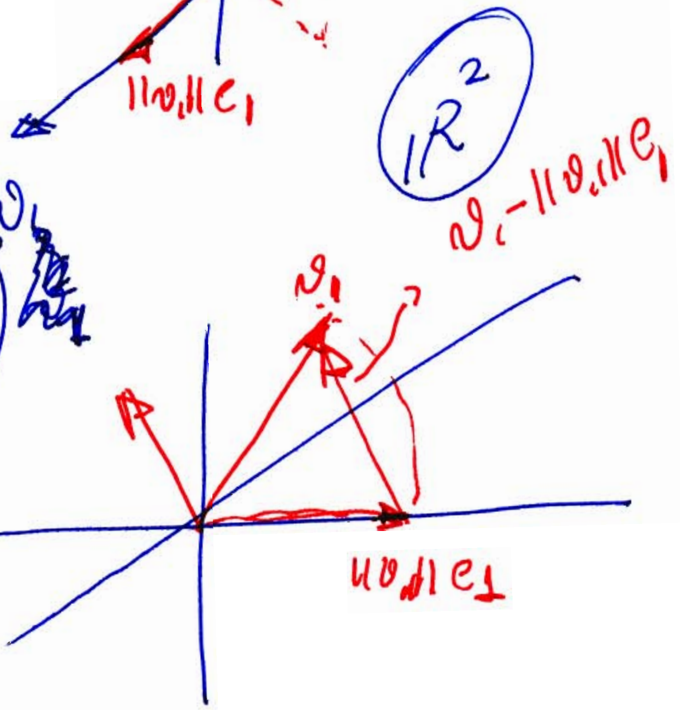
$$\underset{\substack{\parallel \\ (I-2uu^T)}}{H}\begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v_1\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quem escolher como u?

Resposta:

$$u = \frac{v_1 - \|v_1\| e_1}{\|v_1 - \|v_1\| e_1\|} = \frac{v_1 - \sigma e_1}{\|v_1 - \sigma e_1\|}$$





De fato:

$$Hv_1 = \left(I - 2\left(\frac{v_1 - \|v_1\| e_1}{\|v_1 - \|v_1\| e_1\|}\right)\left(\frac{v_1 - \|v_1\| e_1}{\|v_1 - \|v_1\| e_1\|}\right)^T\right) v_1$$

$$\parallel$$

$$v_1 - 2\frac{(v_1 - \|v_1\| e_1)(v_1^T - \|v_1\| e_1^T) v_1}{\|v_1 - \|v_1\| e_1\|^2}$$

$$\parallel$$

$$v_1 - 2\frac{(v_1 - \|v_1\| e_1)(v_1^T v_1 - \|v_1\| e_1^T v_1)}{\|v_1 - \|v_1\| e_1\|^2}$$

$$\parallel$$

$$v_1 - 2\frac{v_1 v_1^T v_1 - \|v_1\| v_1 e_1^T v_1 - \|v_1\| e_1 \overset{\|v_1\|^2}{v_1^T v_1} - \|v_1\|^2 e_1 e_1^T v_1}{\|v_1 - \|v_1\| e_1\|^2}$$

$$Hv_1 = \left(I - 2\,\frac{(v_1-\sigma e_1)}{\|v_1-\sigma e_1\|}\cdot\frac{(v_1-\sigma e_1)^T}{\|v_1-\sigma e_1\|}\right)v_1$$

número

$$= v_1 - (v_1-\sigma e_1)\,\frac{2(v_1-\sigma e_1)^T v_1}{(v_1-\sigma e_1)^T(v_1-\sigma e_1)}$$

Agora

$$\frac{2(v_1-\sigma e_1)^T v_1}{(v_1-\sigma e_1)^T(v_1-\sigma e_1)} = \frac{2v_1^T v_1 - 2\sigma e_1^T v_1}{v_1^T v_1 - \sigma v_1^T e_1 - \sigma e_1^T v_1 + \sigma^2 e_1^T e_1}$$

$$\cancel{= \frac{2\sigma^2 - 2\sigma v_{11}}{\sigma^2 - \sigma e_1 v_{11} - \sigma e_1 v_{11} + \sigma^2}}$$

$$= \frac{2\sigma^2 - 2v_{11}\rho}{\sigma^2 - \sigma v_{11} - \sigma v_{11} + \sigma^2}$$

$$= \frac{2\sigma^2 - 2v_{11}\rho}{2\sigma^2 - 2v_{11}\rho} = 1$$

Então $Hv_1 = v_1 - (v_1 - \sigma e_1)\cdot 1 = \sigma e_1$.

~~EXEMPLO~~

$$\cancel{A = \begin{array}{c} v_1 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array}}$$

EXEMPLO

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

PASSO 1

$$\|v_1\| = 5$$

$$\tilde{u} = v_1 - \|v_1\| e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = I - 2uu^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 A = \cancel{\begin{bmatrix} 5 & 4/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

PASSO 2

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\|v_2\| = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\tilde{u} = v_2 - \|v_2\| e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{34}}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} -3 \\ \\ \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3-\sqrt{34}}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{I - 2uu^T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-61-12\sqrt{34}}{25} & \frac{6+2\sqrt{34}}{5} \\ 0 & \frac{6+2\sqrt{34}}{5} & 0 \end{bmatrix}}$$

PASSO 2

$$\begin{array}{cc} v_2 & \\ \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}-3/5\\0\end{matrix}\end{array}\right] & \end{array}$$

Aqui tem uma escolha de sinal obrigatório

$$\|v_2\| = 1$$

$$\tilde{u} = v_2 - \|v_2\| e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{+}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{I - 2uu^T}} \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 4/5 \\ \frac{4}{5} & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{= H_1^T H_2^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{bmatrix}}_{R}$$

Por Gram-Schmidt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|\tilde{w}_1\| = 5$

- $\tilde{w}_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad w_1 = \dfrac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$w_2 = \dfrac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \|\tilde{w}_2\| = 1$

- $\tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/25 \\ 9/25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$w_3 = \dfrac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \|\tilde{w}_3\| = 3/5$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

ROTAÇÕES DE GIVENS

20

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

PASSO 1

$$\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{ca - sa = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$c^2 + s^2 = 1$$

$$\begin{cases} ac - bs = \sqrt{a^2+b^2} \\ bc + as = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} ac - bs = \sqrt{a^2+b^2} \\ c = \frac{as}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2 s}{b} - bs = \sqrt{a^2+b^2} \\ (a^2-b^2)s = b\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow}$$

~~$(b \neq 0)$~~

($b \neq 0$ caso contrário não é preciso fazer rotação alguma)

$$\Rightarrow c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad s = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$c = \frac{3}{5}, \quad s = -\frac{4}{5}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_1 A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{a}\ 0 \\ \cancel{b}\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = 0, \quad s = -1$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 G_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{bmatrix}$$

GS

Não é numericamente estável.
MGS é mais estável
Custo (GS + Least Squares) $2n^2m - \frac{2}{3}n^3$ } Demmel pág 109

Householder

Custo $2n^2m - \frac{2}{3}n^3$ (Householder)
Custo do Least Squares: nm } Demmel pág. 121 golub pág 225

Givens

Custo: o dobro do custo de Householder } Demmel página 123

Tem uma versão "fast", mas que ainda é mais lenta que Householder (é útil para certos algoritmos que calcula autovalores)
Custo: $3n^2m - n^3$ } golub 227