AINDA SOBRE A DECOMPOSIÇÃO SVD

$$A_{m\times n} = U_{m\times m}\, \Sigma_{m\times n}\, \underbrace{V^T}_{n\times n}$$

U: ortogonal; V^T: ortogonal

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Se $m \neq n$, então $\Sigma^T \neq \Sigma$

V é formada pelos autovetores de A^TA.

$$U = \left[\frac{Av_1}{\sigma_1}, \ldots \frac{Av_r}{\sigma_r}, \underbrace{u_{r+1}, \ldots, u_m}_{\text{completamento de base + Gram-Schmidt}} \right]$$

$\sigma_1 = \|Av_1\|$, $\sigma_r = \|Av_r\|$

• FATO: As colunas de U são autovetores de AA^T.

De fato

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T$$
$$= (U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T)$$
$$= U \underset{m\times n}{\Sigma}\, \underset{n\times m}{\Sigma^T}\, U^T$$
$$\Downarrow$$
$$AA^T U = U \begin{bmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

Se $A = U\Sigma V^T$ então as colunas de V são autovetores de A^TA:
$A^TA = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$
$A^TAV = V(\Sigma^T\Sigma)$
As r primeiras colunas de U são $\frac{Av_i}{\sigma_i}$.

BASES PARA OS QUATRO SUBESPAÇOS VETORIAIS

$\mathrm{Ker}(A)$ em $\mathbb{R}^n$

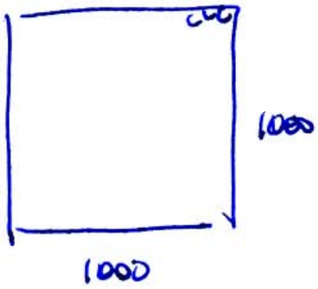
$\mathrm{Im}(A) = \mathcal{C}(A)$ em $\mathbb{R}^m$

$\mathrm{Ker}(A^T)$ em $\mathbb{R}^m$

$\mathrm{Im}(A^T) = \mathcal{R}(A)$ em $\mathbb{R}^n$

- As r primeiras colunas de U formam uma base para $\mathrm{Im}(A)$.
- As $m-r$ últimas colunas de U formam uma base para ~~$\mathcal{R}(A)$~~ $\mathrm{Ker}(A^T) = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$
- As últimas $n-r$ colunas de V formam uma base para $\mathrm{Ker}(A)$ (pois $Av_{r+1}=0, \dots, Av_n=0$)
- As primeiras r colunas de V formam uma base para $\mathrm{Im}(A^T) = \mathcal{R}(A) = (\mathrm{Ker}(A))^{\perp}$.

COMPRESSÃO DE IMAGENS



$$A = U \Sigma V^T$$

$$= U \begin{bmatrix} \sigma_1 v_1^T \\ \vdots \\ \sigma_r v_r^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 v_1^T \\ \vdots \\ \sigma_r v_r^T \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$= (a_1 b_1)_{ij} + (a_2 b_2)_{ij} + \dots + (a_n b_n)_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_1} & \cdots & \boxed{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{B = \begin{bmatrix} \boxed{b_1} & \cdots & \boxed{b_p} \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{B^T = \begin{bmatrix} \boxed{b_1^T} \\ \vdots \\ \boxed{b_p^T} \end{bmatrix}}$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{b_1} \\ \vdots \\ \boxed{b_n} \end{bmatrix}$$

a_1 é $m \times 1$

b_1 é $1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bz & bt \\ dz & dt \end{bmatrix}$$

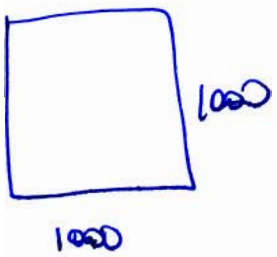
$$= \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} [x \; y] + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} [z \; t].$$

~~Moral:~~

$$\cancel{A = U \Sigma V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T}$$

$$A = U\Sigma V^T = \underbrace{\sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T}_{k} + \dots + \sigma_r u_r v_r^T$$

Suponha que k = 60



Total 1000000 de números.

$$\overset{60\,\sigma}{60} + \overset{60\,u}{60 \times 1000} + \overset{60\,v}{60\,1000}$$

$$60 \times (2001) = 120060$$

---

load detail

size(x), rank(x)

figure(2), subplot(2,2,1), image(x), axis image, axis off

colormap(gray(64))

;3;

[U,S,V] = svd(X)

r = 1;

figure(2), subplot(2,2,2), image(U(:,1:r) * S(1:r,1:r) * V(:,1:r)')

colormap(gray(64)),

axis image, axis off

CÁLCULO NUMÉRICO DO POSTO DE UMA MATRIZ

↳ Em aritmética exata, pode ser feita com decomposição LU!

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 2\varepsilon \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varepsilon & 2\varepsilon \\ 0 & \cancel{2-\frac{2\varepsilon}{\varepsilon}} \end{bmatrix}$$

$$2 - \frac{1}{\varepsilon}(2\varepsilon)$$

No MATLAB

~~epsilon = 0;~~

```
format long
epsilon = 0,000000001;
f = 1/epsilon;
b = 2*epsilon
d = 2-f*b.
```

$2,22\ldots \times 10^{-16}$

A matriz tem posto 1, mas por LU e por erros de aproximação, dois pivôs ~~aproxi~~ pequenos aparecerão

↳ $\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

↳ OK! Posto 1

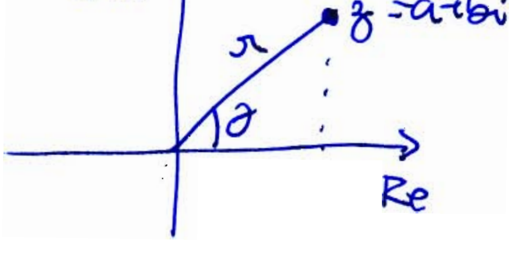
↳ $\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1+\varepsilon \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ ~~tem posto 2~~ tem posto 2 mas "moralmente" tem posto 1.

A idéia é adotar uma tolerância e considerar como posto efetivo o número de valores singulares menores do que esta tolerância.

DECOMPOSIÇÃO POLAR

$z = re^{i\theta}$

$\hookrightarrow r \geq 0$



PARA MATRIZES QUADRADAS

$e^{i\theta}$ é a parte ortogonal, pois

$$e^{-i\theta}e^{i\theta} = 1.$$

Para o caso de matrizes, quadrada real

$$A = QS$$

$S \hookrightarrow$ simétrica positiva ~~definida~~ semi-definida

$Q \hookrightarrow$ ortogonal.

Esta decomposição sempre existe pois

$$A = U\Sigma V^T = \underbrace{UV^T}_{\text{ortogonal}}\underbrace{(V\Sigma V^T)}_{\text{positiva semidefinida}}$$

Todas as matrizes são quadradas

pois Σ tem elementos da diagonal principal ≥ 0,

Não é única pois a decomposição SVD não é única

Se A é inversível, então S é positiva definida.

Decomposição $A = SQ$:

$$A = U\Sigma V^T = \underbrace{U\Sigma U^T}_{\tilde{S}}\,\underbrace{U V^T}_{Q}$$

Observação: a partir de uma decomposição $A = QS$ é possível obter ~~a decompo~~ uma SVD para A: desde que S é simétrica, pelo teorema espectral,

$$\boxed{S = \tilde{Q} D \tilde{Q}^T}$$

Mais ainda, como S é positiva semi-definida, os elementos da diagonal principal de D são ≥ 0. Então:

$$A = QS = \underbrace{Q\tilde{Q}}_{U}\,\underbrace{D}_{\Sigma}\,\underbrace{\tilde{Q}^T}_{V^T}.$$

↳ Aplicação da decomposição QS em robótica

Q: parte rígida
S: parte de deformação

QUADRADOS MÍNIMOS E A PSEUDOINVERSA DE UMA MATRIZ

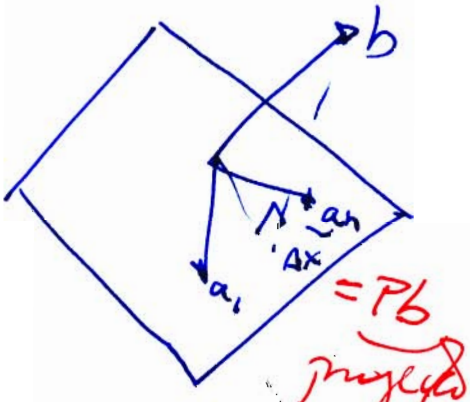
$$Ax = b$$

Linhas de A LD implicam em sistema inconsistente:

$$2x = b_1$$
$$4x = b_2$$
$$6x = b_3$$

Alternativa: trocar $Ax=b$ por

$$\min \|b - Ax\|^2$$



$$A^T(b - A\tilde{x}) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$A^TA\tilde{x} = A^Tb \quad \text{(equações normais)}$$

Se as colunas de A são LI, então A^TA é inversível e, então

$$\tilde{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb.$$

Se A é $m \times n$ e tem posto $r < n$

então

- Se A tem posto r, A^TA tem posto r. ($A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^T = V\Sigma^T U^T$, $A^TA = V\Sigma^T\Sigma V^T$)
- $Im(A^TA) \subset Im(A^T)$

$Im(A^T) = R(A)$ tem dimensão r

Logo $Im(A^TA) = Im(A^T)$

Com $A^Tb \in Im(A^T)$, deve existir x tal que $A^TAx = A^Tb$.

A^TA é $n \times n$ e tem posto r

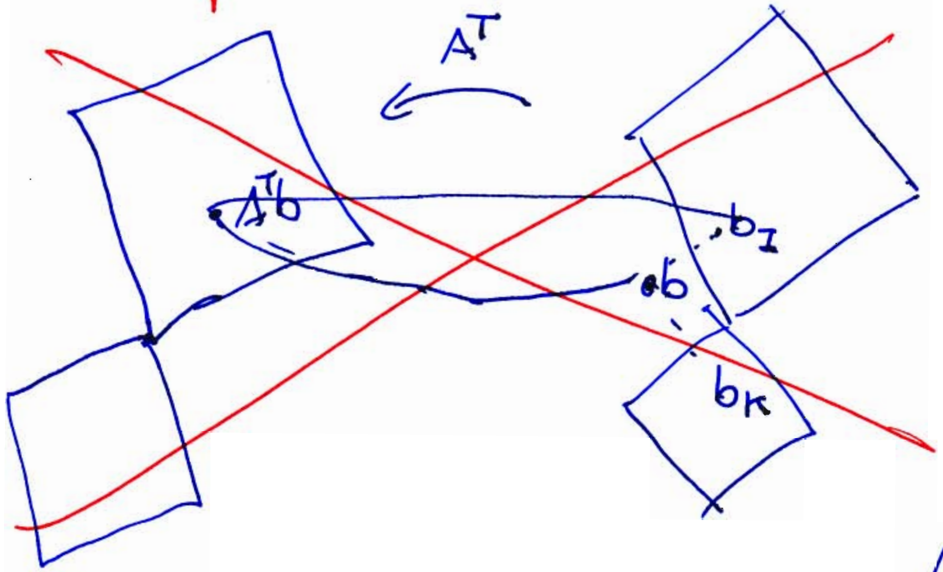
$$\left(A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\underbrace{\Sigma^T\Sigma}V^T \right)$$

A^Tb

↳ está no espaço gerado pelas colunas de A^T

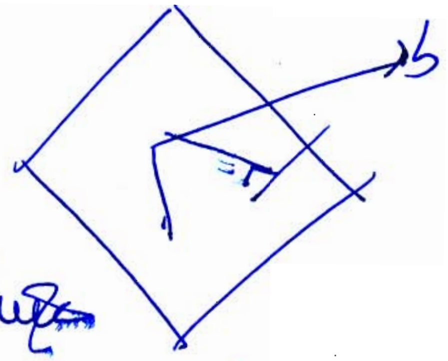
$$A^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^Ta_1 & \cdots & A^Ta_n \end{bmatrix}$$

As colunas de A^TA são geradas pelas colunas de A^T



$$A^TAx = A^Tb$$

Se as colunas de A são LD, então existe mais de um $\tilde{x}$ que é solução de $A^TA\hat{x} = A^Tb$.



A idéia é tomar como solução, o elemento x^+ de menor norma que satisfaz

$$A^TAx = A^Tb.$$

Quem é x^+?

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Vamos projetar $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ em $C(A)$:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Pb = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é o ponto de $C(A)$ mais próximo de $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Assim,

$$A\tilde{x} = p$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 \tilde{x}_1 = b_1$$

$$\sigma_2 \tilde{x}_2 = b_2$$

$\tilde{x}_3$ e $\tilde{x}_4$ são arbitrários

Logo, tomamos $\tilde{x}_1 = b_1/\sigma_1$

$$\tilde{x}_2 = b_2/\sigma_2$$

$$\tilde{x}_3 = 0$$

$$\tilde{x}_4 = 0$$

Portanto $x^+ = \begin{bmatrix} b_1/\sigma_1 \\ b_2/\sigma_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

~~Assim, para sistemas~~

~~$\Sigma x = b$, com Σ diagonal~~

Moral: se

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

então a solução ótima $\left(\begin{array}{l} \text{que minimiza } \|b - \Sigma x\| \\ \text{e } \|x\| \end{array} \right)$ é

$$x^+ = \Sigma^+ b$$

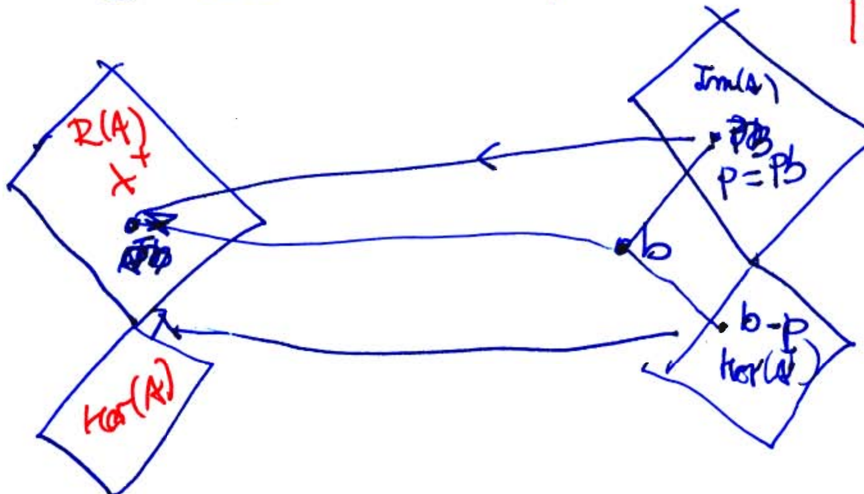
onde $\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/\sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$

Observação: $(\Sigma^+)^+ = \Sigma$ (como $(A^{-1})^{-1} = A$ mas Σ não é quadrada).

CASO GERAL

~~A transposta~~ (NÃO É A TRANSPOSTA, POIS QUEREMOS UMA INVERSA DE entre $\mathcal{I}(A)$ e $R(A)$.

R(A) e $\mathcal{I}(A)$ possuem a mesma dimensão!



$$A \circ A^{+}\big|_{R(A)} = I$$

$$A^{+} \circ A\big|_{R(A)} = I .$$

x^{+} deve estar em $R(A)$ pois $x = x^{+} + x_{\pi}$, $\|x\|^2 = \|x^{+}\| + \|x_{\pi}\|$ e $Ax = Ax^{+}$

FATO: ~~$A^{+} =$~~ Se $A = U\Sigma V^T$, então

$$A^{+} = V\Sigma^{+}U^T$$

Demonstração: seja $b \in \mathbb{R}^m$ e coloque $x^{+} = V\Sigma^{+}U^T$.
Então

$$\|Ax - b\| = \|U\Sigma V^T x - b\|$$

U^T é ortogonal

$$= \|U^T U\Sigma V^T x - U^T b\|$$

$$= \|\Sigma V^T x - U^T b\|$$

Seja $y = V^T x$. (de forma que $x = Vy$)
$= V^{-1}x$ (note que x tem ~~tam~~ o mesmo tamanho de y, pois V é ortogonal)

Então $\|Ax - b\| = \|\Sigma y - U^T b\|$

Σ matriz diagonal.

Logo $\tilde{y} = \Sigma^{+}U^T b$

$$\Downarrow$$

$$V^T x = \Sigma^{+}U^T b \Rightarrow x^{+} = V\Sigma^{+}U^T b$$
$$= A^{+}b .$$

- $x^+ \in \mathcal{R}(A)$ pois

$$x^+ = \underbrace{V\Sigma^+}U^T b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sigma_r & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{bmatrix} U^T b$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{v_1}{\sigma_1} \; \cdots \; \frac{v_r}{\sigma_r}}_{\text{Geram } \mathcal{R}(A)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} U^T b$$

$$\begin{bmatrix} x & 2y \\ 3x & ? \end{bmatrix}$$

$$Ax^+ = U\Sigma V^T V \Sigma^+ U^T b$$

$$= U\Sigma\Sigma^+ U^T b$$

$$= U \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1_{n\times n} & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{bmatrix} U^T b \; \} \; b$$

Σ é $m \times n$

Σ^+ é $n \times m$

$\Sigma\Sigma^+$ é $m \times m$

Se $A = U\Sigma V^T$ e $b \in \mathbb{R}^m$, quem é a projeção de b em $\mathcal{C}(A)$ em termos de b, U, Σ e V?

Resposta: $U = \left[\begin{array}{cccccc} u_1 & \cdots & u_r & u_{r+1} & \cdots & u_m \end{array}\right]$

$\underbrace{u_1 \cdots u_r}_{\text{base para } \mathcal{C}(A)} \quad \underbrace{u_{r+1} \cdots u_m}_{\text{base para } \ker(A^T)}$

Como as colunas de ~~A~~ U formam ~~uma~~ uma base para $\mathbb{R}^m$, sabemos que existem $y_G \in \mathbb{R}^r$ e $y_N \in \mathbb{R}^{m-r}$ tais que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} | & \cdots & | & | & \cdots & | \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_G \\ y_N \end{bmatrix} = b.$$

$$\begin{bmatrix} y_G \\ y_N \end{bmatrix} = U^{-1} b = U^T b.$$

Então $$Pb = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{bmatrix} y_G$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_r & u_{r+1} & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= U \begin{bmatrix} y_G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= U \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_G \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$= U \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T b$$

TRILHA ALTERNATIVA:
A projeção ~~da~~ ortogonal de b em $\mathcal{C}(A)$ é $A\underbrace{A^+ b}_{x^+}$. Para ver isto, basta mostrar que $b - AA^+b$ é ortogonal as colunas de A:

$$A^T(b - AA^+b) = A^Tb - A^TAA^+b$$
$$= V\Sigma^T U^T b - V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T V \Sigma^+ U^T b$$
$$= V\Sigma^T U^T b - V\Sigma^T \underbrace{\Sigma\Sigma^+}_{= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} U^T b$$
$$= V\Sigma^T U^T b - V\Sigma^T U^T b = 0$$

Agora,

$$\cancel{x^+ = A^+ b = (V\Sigma^+ U^T) b}$$

$$
\begin{aligned}
Ax^+ = AA^+ b &= U\Sigma V^T V \Sigma^+ U^T b \\
&= U \Sigma \Sigma^+ U^T b \\
&= U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T b \\
&= Pb .
\end{aligned}
$$

Se Q é $m\times n$ e tem colunas ortonormais, então $Q^+ = Q^T$. De fato:

$$Q = U \Sigma V^T = U \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ 0 \end{bmatrix} V^T = [U_{11} \quad U_{12}] \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} V^T$$

$$= U_{11} V^T$$

$$Q^+ = V \Sigma^+ U^T = V [I_{n\times n} \quad 0] U^T = V [I_{n\times n} \quad 0] \begin{bmatrix} U_{11}^T \\ U_{12}^T \end{bmatrix}$$

$$= V U_{11}^T = (U_{11} V^T)^T = Q^T$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR

1

FORMA PADRÃO

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.a}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\min\ & c^T x \\
\text{s.a}\ & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
}
$$

↳ coordenada a coordenada

- $\max\limits_{x \in X} c^T x = \min\limits_{x \in X} -c^T x$

- $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ (VARIÁVEIS DE FOLGA)

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + u_1 = 4 \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$$

- $2x_1 + 3x_2 \geq 4$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - u_1 = 4 \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$$

- $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - v_1 \\ u_1 \geq 0,\ v_1 \geq 0 \end{cases}$$

- $x_1 \leq 0$

$$\Downarrow$$

$$-x_1 \geq 0$$

SOLUÇÕES BÁSICAS

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.a } Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

HIPÓTESES: (1) $n > m$ (mais variáveis do que equações)

(2) posto de A é m (as m linhas são LI)

DEFINIÇÃO Seja B qualquer submatriz $m \times m$ construída com uma escolha de m colunas LI de A. Então, se todas $n-m$ componentes de x não associadas à escolha de colunas B forem iguais a zero, a solução do conjunto de equações resultantes desta escolha é denominada uma solução básica de

$$Ax=b$$

As componentes de x associadas a B são denominadas variáveis básicas.

<u>DEFINIÇÃO</u> Se em uma solução básica, pelo menos uma das variáveis básicas é zero, dizemos então que a solução básica é degenerada.

<u>EXEMPLO:</u>

~~EXTRA~~ $\cancel{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{B}$$

variáveis básicas

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ é solução básica degenerada

- $A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \end{bmatrix}$

  B

  $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ variáveis básicas

  é solução degenerada

- $A = \begin{bmatrix} \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \end{bmatrix}$

  B

  $x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ variáveis básicas

  ↳ solução básica não degenerada.

OBSERVAÇÃO: Uma variável básica nula pode ser trocada por uma variável não-básica (que, na ~~situação~~ situação em questão, também é nula)

<u>DEFINIÇÃO</u> Dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é admissível se ele ~~satis~~ satisfaz as restrições

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Se um ponto admissível é uma solução básica, dizemos que ele é uma solução admissível básica.
Se ~~a solução~~ o ponto admissível também é uma solução básica degenerada, dizemos que ele é uma solução admissível básica degenerada.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Considere o programa linear

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.a } Ax = b \\ &\quad\;\; x \geq 0 \end{aligned}$$

com $A_{m \times n}$, $m < n$ e posto de $A = m$.

(1) Se existe uma solução admissível para o sistema $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ então existe uma solução básica admissível para $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

(2) Se existe uma solução admissível ótima para $\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.a } Ax = b \\ &\quad\;\; x \geq 0 \end{aligned}$, então existe uma solução básica admissível ótima para $\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.a } Ax = b \\ &\quad\;\; x \geq 0 \end{aligned}$.

Demonstração.

(1) Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ um ponto admissível, isto é, que satisfaz

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Denotando-se por $a_1, \ldots, a_n$ as colunas de A,

$$Ax = b \iff x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b.$$

Suponha que p destas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ sejam diferentes de zero. Sem perda, podemos supor que estas sejam as p primeiras. Logo

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p = b$$

CASO 1 Se $\{a_1, \ldots, a_p\}$ é LI, ~~escolha~~ então $p \leq m$. Se $p = m$, então $(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ é uma ~~ponto~~ solução ~~ótima~~ básica admissível de ~~Ax=b~~ $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$. Se $p < m$, então existem outras $m-p$ colunas entre as $n-p$ colunas restantes que, junto $\{a_1, \ldots, a_p\}$ formam um conjunto LI.

Fazendo as variáveis x_i correspondentes iguais a zero, obtemos uma solução básica (degenerada) admissível para $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

<u>CASO 2</u> $\{a_1, \dots, a_p\}$ é LD. Então existem constantes $y_1, \dots, y_p$ não todas nulas tais que

$$y_1 a_1 + \dots + y_p a_p = 0$$

Sem perda, podemos supor que pelo menos um dos $y_j > 0$. Defina, para

$$z^{(\varepsilon)} = x - \varepsilon y$$

onde $y = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$. Note que

$$A z^{(\varepsilon)} = Ax - \varepsilon Ay$$
$$= b - \varepsilon 0 = b, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Contudo $z_i = 0$, $z_i < 0$ ou $z_i > 0$ dependendo de ε e y_j. Agora quando $\varepsilon = 0$

→ os primeiros p coordenadas são positivas.

y só altera as primeiras p coordenadas de x que são > 0

$$z(0) = x \geq 0.$$

↳ com $(x_1, \dots, x_p) > 0$!!!

Se ε aumenta, $x_i - \varepsilon y_i$ aumenta, diminui ou permanece constante dependendo se $y_i < 0$, $y_i > 0$ ou $y_i = 0$, respectivamente. Aumente ε até que uma ou mais componentes de $z(\varepsilon)$ se anulem:

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} \,\middle|\, y_i > 0 \right\}.$$

≥ 0 $1 \leq i \leq p$.

Este conjunto é diferente do vazio pois pelo menos um $y_i > 0$.

Para este valor de ε, $z(\varepsilon)$ satisfaz $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ e tem no máximo $p-1$ componentes positivas. Se as $p-1$ colunas forem LI, caímos no caso 1. Se elas forem LD, repetimos o processo.

(2) Seja $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ uma solução ótima admissível. Como antes, supondo que as p primeiras componentes são > 0, temos dois casos

<u>caso 1</u> $\{a_1, \ldots, a_p\}$ é LI. Neste caso $p \leq m$ e se $p = m$, então

$\{x_1^0, \ldots, x_p^0, 0, \ldots, 0\}$

é uma solução básica admissível ótima para $\begin{cases} \min c^T x \\ \text{s.a } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

Se $p < m$ escolha $m-p$ entre os $m-p$ colunas restantes para ~~obte~~ obter um conjunto de colunas LI. Atribuindo-se valor zero para as componentes associadas a estas $m-p$ colunas extras, obtemos uma solução ótima básica (degenerada) 9

~~(2)~~ Caso 2 Como antes, considero

$$z(\varepsilon) = x^* - \varepsilon y$$

Temos que

$$c^T z(\varepsilon) = c^T x^* - \varepsilon c^T y$$

Para todo

$$\max\left\{\frac{x_j^*}{y_j} \mid y_j < 0\right\} < \varepsilon < \min\left\{\frac{x_j^*}{y_j}, y_j > 0\right\}$$

$$x_j^* - \varepsilon y_j \geq 0$$

se não existir j tal que $y_j < 0$

então $-\infty < \varepsilon < \min\left\{\frac{x_j^*}{y_j} \mid y_j > 0\right\}$

temos que $z(\varepsilon)$ satisfaz $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$. Pela otimalidade de x^*, $c^T y = 0$. Logo $c^T z(\varepsilon) = c^T x^*$. Logo, $z(\varepsilon) = x^* - \varepsilon y$, onde $\varepsilon = \min\left\{\frac{x_j^*}{y_j}, y_j > 0\right\}$ é ainda uma solução ótima com no máximo $p-1$ coordenadas positivas. Se as respectivas colunas são LI, caímos no caso 1. Se elas forem LD, repetimos o processo. ∎