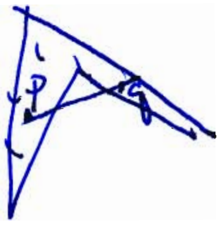
RELAÇÕES COM CONVEXIDADE

DEFINIÇÃO Um conjunto C é convexo se

$$\forall p,q \in C,\ \forall t \in [0,1],\ \underbrace{(1-t)p+tq}_{} \in C$$

↳ segmento de reta unindo p a q
combinação linear convexa dos pontos p e q.

CONVEXO



NÃO CONVEXO

FATOS: (1) INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS CONVEXOS É AINDA UM CONJUNTO CONVEXO

(2) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax=b \text{ e } x \geq 0\}$ é um conjunto convexo. (EXERCÍCIO)

DEFINIÇÃO Um ponto p de um conjunto convexo C é denominado ponto extremo de C se não existem dois pontos distintos $p_1, p_2 \in C$ tais que

$$p = (1-\alpha)p_1 + \alpha q_2 \text{ para algum } \alpha \in (0,1)$$

Em outras palavras, um ponto de C é um ponto extremo se ele não é combinação linear convexa de outros dois pontos distintos de C

~~círculo~~ círculo

os pontos extremos são os da fronteira do círculo

Os vértices são os únicos pontos extremos

TEOREMA (EQUIVALÊNCIA DOS PONTOS EXTREMOS E SOLUÇÕES BÁSICAS)

Seja A uma matriz $m \times n$ de posto m e seja b b um vetor em $\mathbb{R}^m$. Considere

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$$

↳ um politopo convexo em $\mathbb{R}^n$

Um vetor x é ponto extremo de K se, e somente se, ele é uma solução básica admissível para

$$\cancel{Ax=b}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \qquad\qquad (*) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) Seja x uma solução básica admissível de (*). Sem perda de generalidade, podemos assumir que x corresponde à escolha ~~de m colunas~~ das m primeiras colunas de A como colunas LI. Assim,

$$x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

Suponha, por absurdo, que x não seja um ponto extremo. Então existem $y, z \in K$ ~~satisf~~ ~~b~~ e $\alpha \in (0,1)$ tais

$$x = (1-\alpha)y + \alpha z$$

isto é,

$$(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0) = (1-\alpha)(y_1,\dots,y_m,y_{m+1},\dots,y_n) + \alpha(z_1,\dots,z_m,z_{m+1},\dots,z_n)$$

Logo

$$\underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\underbrace{y_i}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha}_{>0}\underbrace{z_i}_{\geq 0} = 0, \quad \forall i = m+1,\dots,n$$

Isto implica $y_i = 0$ e $z_i = 0$. Então

$x_1a_1+\dots+x_ma_m=b$
$y_1a_1+\dots+y_ma_m=b$
$z_1a_1+\dots+z_ma_m=b$
como $\{a_1,\dots,a_m\}$ é LI, b se escreve de maneira única como combinação linear de $\{a_1,\dots,a_m\}$. Logo $y=x$ e $z=x$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overset{\text{inversível}}{B} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{bmatrix} = b \Rightarrow B\tilde{x} = b$$

$$\begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ 0 \end{bmatrix} = b \Rightarrow B\tilde{y} = b$$

$$\begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ 0 \end{bmatrix} = b \Rightarrow B\tilde{z} = b$$

Como B é $m\times m$ inversível, ~~isto implica~~ segue-se que a solução do sistema ~~$Ax=b$ é~~ $Bx=b$ é única. Logo $\tilde{x}=\tilde{y}=\tilde{z}$ e, portanto,

$$x = y = z.$$

($\Rightarrow$) Seja x um ponto extremo de K. Suponha, sem perda de ~~generalidade~~ generalidade, que as componentes não nulas de x sejam as k primeiras.

Vamos mostrar que as colunas $\{a_1, \ldots, a_k\}$ são LI e, com isto, x será uma solução básica admissível. Suponha, por absurdo, que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ seja LD. Então existem escalares ~~não todos nulos tais que~~ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0.$$

Seja

$$y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0).$$

Como $x_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$, é possível escolher $\varepsilon > 0$ tal que

$$\boxed{x - \varepsilon y \geq 0} \quad \text{e} \quad \boxed{x + \varepsilon y \geq 0.}$$

Note que $z_1 = x - \varepsilon y \in K$ e

$z_2 = x + \varepsilon y \in K$

$$x = \frac{1}{2}(x - \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x + \varepsilon y)$$

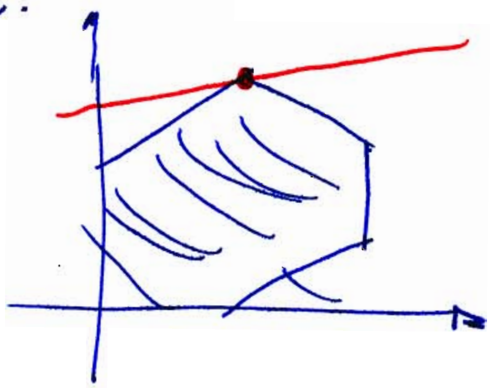
Isto não pode ocorrer, desde que x é um ponto extremo de K. Logo $a_1, \ldots, a_k$ é LI e x é uma solução básica admissível (possivelmente degenerada) de (*). $\blacksquare$

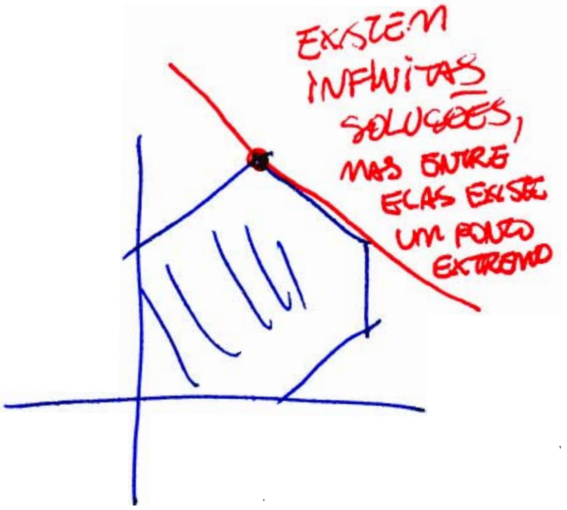
<u>COROLÁRIO 1</u> Se $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$ é não-vazio, então ele possui pelo menos um ponto extremo.

Prova: Se K é não-vazio, então ele possui um ponto admissível. Pelo teorema fundamental da ~~Álgebra Linear~~ Programação Linear, existe então uma solução admissível básica. Pelo teorema, esta solução admissível básica é um ponto extremo de K.

∎

COROLÁRIO 2 Se existe uma solução ótima para um programa linear, então existe uma solução ótima que é um ponto extremo do conjunto admissível.





COROLÁRIO 3 $K=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b \text{ e } x\geq 0\}$ possui um número finito de pontos extremos.

Demonstração: existe um número finito de soluções básicas, logo ~~existe um número finito de~~ K possui um número finito de pontos extremos.

∎

O TABLEAU

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.a}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

~~$c \in \mathbb{R}^n$~~
~~$x \in \mathbb{R}^n$~~
~~$b \in \mathbb{R}^m$~~
~~$A \in \mathbb{R}$~~ ~~$A \in M_{m\times(m+n)}(\mathbb{R})$~~

$$m\left\{\begin{array}{|cc|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{A} \\ \hline \end{array}\right.$$
$$\underbrace{\qquad}_{m}\ \underbrace{\qquad}_{n}$$

$A \in M_{m\times(m+n)}(\mathbb{R})$

$x \in M_{(m+n)\times 1}$

$c \in M_{(m+n)\times 1}$

$b \in \mathbb{R}^m$.

$$\left.\begin{array}{|c:c|}\hline A & b \\ \hdashline c^T & 0 \\ \hline \end{array}\right\}\ m+1 \text{ linhas}$$
$$\underbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{m+n}\ \underbrace{\quad}_{1}}_{m+n+1 \text{ colunas.}}$$

FASE I.

Vamos supor (reordenando se necessário) que as primeiras m colunas de A são LI, logo

$$\begin{array}{c} \text{invertível} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} B & N & b \\ \hline c_B^T & c_N^T & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

A partição de $A = [B \ N]$ induz uma partição em x:

$$x_B \quad x_N \quad .$$

Logo, uma solução básica (que corresponde ~~ao~~ a um ponto extremo do conjunto admissível) é

$$(x_B, x_n) = (B^{-1}b, 0) .$$

Fazendo escalonamentos, obtemos um tableau onde as variáveis básicas aparecem ~~apenas~~ uma por linha, com coeficiente 1:

$U, L, A = I_A = LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline \boxed{c_B^T} & \boxed{c_N^T} & \boxed{0} \end{array}\right]$$

esta linha ainda não foi escalonada.

$[A \ I]$

escalonamento

$[MA \ M]$

Se $MA = I$, então $M = A^{-1}$

$$\cancel{x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_n}$$

$$\cancel{f(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N}$$

$$\cancel{= c_B^T (B^{-1}b}$$

$$x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$f(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N = $$

$$= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N = (c_N^T - c_B^T B^{-1}N) x_N + c_B^T B^{-1} b$$

$$= (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N + c_B^T B^{-1} b$$

cuidado! sinal contrário!

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline 0 & \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)}_{r^T} & -c_B^T B^{-1} b \end{array}\right]$$

Multiplicando a primeira linha por $-c_B^T$ e somando com a segunda linha

Se $r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

então $f(x) = r^T \underbrace{x_N}_{0} + c_B^T B^{-1} b$, $x_B = B^{-1} b$

SE ALGUMA COMPONENTE DE r É <0, podemos aumentar a coordenada correspondente para ~~diminuir~~ diminuir o valor da função objetivo. ~~Precisamos fazer isto mantendo admissibilidade. O índice de r para o qual a respectiva componente é negativa indica que~~

- O índice i para o qual a respectiva componente de r é a mais negativa indica qual variável não básica entrará no conjunto de variáveis básicas!
- ~~Devemos aumentar~~ Queremos aumentar o valor da variável não básica o máximo

possível, mas mantendo admissibilidade

- Se o vetor r tem todas as componentes ~~não~~ não-negativas, então ~~a solução~~ não é possível diminuir o valor da função objetivo. ~~Assim,~~ Assim, a solução básica admissível atual é uma solução ótima.

- suponha que a componente com o valor mais negativo seja r_i.
  Vamos aumentar o valor da variável não básica correspondente de 0 até α, mantendo admissibilidade

$$\cancel{x_B + B^{-1}A x_\alpha = B^{-1}b}$$

Já sabemos quem é u, que corresponde a coluna da variável que ~~entrará~~ entrará na base!

$$x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b$$

$$x_B + B^{-1}N \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \to i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = B^{-1}b$$

$$N = \begin{array}{c} \hphantom{[\,[\,]\cdots} i \\ \left[\,[\;]\cdots[\,u\,]\cdots[\;]\,\right] \end{array}$$

$$x_B + B^{-1}\alpha u = B^{-1}b$$

$$\Downarrow$$

$$x_B + \alpha B^{-1}u = B^{-1}b$$

$$\Downarrow$$

$$x_B = \underbrace{B^{-1}b}_{\geq 0} - \alpha B^{-1}u \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} (B^{-1}b)_1 \\ \vdots \\ (B^{-1}b)_i \\ \vdots \\ (B^{-1}b)_m \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} (B^{-1}u)_1 \\ \vdots \\ (B^{-1}b)_i \\ \vdots \\ (B^{-1}b)_m \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}u)_i} \;\middle|\; (B^{-1}u)_i > 0 \right\}$$

Se todos os $(B^T w)_i < 0$, então α pode ser arbitrariamente grande, mantendo a admissibilidade e fazendo com que a função objetivo tenda a $-\infty$

EXEMPLO

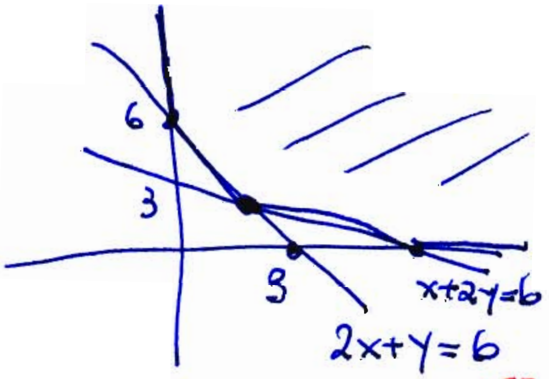
$$\begin{aligned} \min\ & x+y \\ \text{s.a}\ & x+2y-w=6 \\ & 2x+y-v=6 \\ & x\geq 0,\ y\geq 0,\ v\geq 0,\ w\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & w & v & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vamos escolher $x=0$, $v=0$, de modo que as variáveis básicas são w e y. Vamos reorganizar o tableau:

$$\begin{array}{cccc|c} w & y & x & v & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} \min\ & x+y \\ \text{s.a}\ & x+2y\geq 6 \\ & 2x+y\geq 6 \\ & x\geq 0,\ y\geq 0 \end{aligned}$$



Escalonando

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow 2L_2 + L_1$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \sim$$

VER PÁGINA 18a

$$\begin{array}{cccc|c} w & y & x & v & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

SOLUÇÃO BÁSICA:
$(x, y, w, v) = (0, 6, 6, 0)$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline 0 & \pi & -c_B B^{-1} b \end{array}\right]$$

$r = [-1 \quad 1]$

Então x é a variável ~~básica~~ não básica que entrará na base

Qual é a variável que sairá?

Para sair w: $3\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2$

Para sair y: $2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$

Sai w!!! Entra x!

$$\begin{array}{cccccc} x & y & w & v & & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 3 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

Escalonar novamente:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & w & v \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -4 \end{array}\right] \end{array}$$

SOLUÇÃO BÁSICA: $(2, 2, 0, 0)$

Como $r = \left[\frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right] > 0$, a solução básica é ótima!

no final da página 17:

$$
\begin{array}{cccccc}
w & y & x & v & & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc:cc:c}
1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\
\hdashline
0 & 0 & -1 & 1 & -6
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{cases} w + 3x = 6 \\ y + 2x = 6 \end{cases}
$$

E se tivéssemos

$$
\begin{cases} w + 3x = 6 \quad (1) \\ y - 2x = 6 \quad (2) \end{cases} ?
$$

$(1) \Rightarrow w = 6 - 3x$. Se $w \geq 0$, então $x \leq 2$

$(2) \Rightarrow y = 6 + 2x$. Aqui x pode ~~...~~ aumentar arbitrariamente

Logo x deve ser menor do que ou igual a 2!

Por este motivo

$$
\alpha = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}u)_i} \;\middle|\; (B^{-1}u)_i > 0 \right\}
$$

E se tivéssemos

$$
\begin{cases} w - 3x = 6 \\ y - 2x = 6 \end{cases} ?
$$

Então $w = 6 + 3x$, $y = 6 + 2x$. Então x pode ser arbitrariamente grande e, então, a ~~...~~ função objetivo não é limitada inferiormente!

PASSO DO SIMPLEX

(1) Calcule $\lambda = c_B B^{-1}$ e $r = c_N - \lambda N$

(2) Se $r \geq 0$, pare. A solução básica admissível é ótima.

Se r_i é a componente mais negativa, escolha a i-ésima coluna de N para entrar na base. Denote-a por u.

(3) Calcule $v = B^{-1} u$

(4) Calcule $\min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{v_i} \;\middle|\; v_i > 0 \right\} \cancel{= \frac{(B^{-1}b)_k}{v_k}}$

Se não existe i tal que $v_i > 0$, então a função ~~[illegible]~~ objetivo tende a $-\infty$ no conjunto admissível. Se

$$\min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{v_i} \;\middle|\; v_i > 0 \right\}$$

ocorre para $i = k$, então a k-ésima coluna de B deixará a base.

(5) Atualize B e a solução $x_B = B^{-1} b$ e volte para o passo (1)

IMPORTANTE: OS OBJETOS QUE QUEREMOS CALCULAR SÃO 3 SISTEMAS QUE PODEM SER OBTIDOS ATRAVÉS DE UMA DECOMPOSIÇÃO LU!

$\lambda = c_B B^{-1}$ $\qquad v = B^{-1} u$ $\qquad x_B = B^{-1} b$

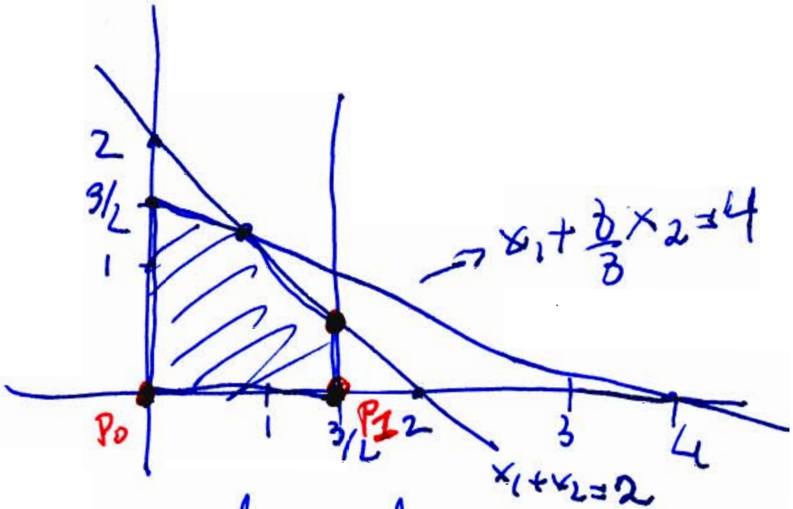
$\lambda B = c_B$ $\qquad B v = u$ $\qquad B x_B = b$

$B^T \lambda^T = c_B^T$

DECOMPOSIÇÃO LU PARA B

EXEMPLO

$$\min \; -2x_1 - x_2$$
$$\text{s.a} \quad x_1 + \tfrac{8}{3}x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$



5 pontos extremos

$(0,0)$, $(3/2, 0)$, $(3/2, 1/2)$

$(\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$, $(0, 3/2)$

FORMA PADRÃO

$$\min \; -2x_1 - x_2$$
$$\text{s.a} \quad x_1 + \tfrac{8}{3}x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + x_5 = 3$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, 5.$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 8/3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}$$

- VARIÁVEIS BÁSICAS: x_3, x_4, x_5

SOLUÇÃO BÁSICA: $(0,0,0,4,2,3)$

QUEM ENTRA NA BASE? x_1

QUEM SAI DA BASE?

$x_3=0 \Rightarrow x_1=4$

$x_4=0 \Rightarrow x_1=2$

$x_5=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$

SAI x_5!

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc|cc|c} x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & x_2 & b \end{array} \\ B & \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 8/3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ & C_B^T & & & C_N^T & \end{array}\right] \end{array}$$

Devemos reescrever o PL na forma canônica.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} B & N & b \\ \hline C_B^T & C_N^T & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc|c} x_3 & x_4 & x_1 & x_5 & x_2 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 8/3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\Downarrow$ Escalonando:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline C_B^T & C_N^T & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 8/3 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Solução básica: $(3/2, 0, 5/2, 1/2, 0)$

Reescrever a função objetivo usando as variáveis não básicas:

$$f(x) = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 = 3/2 - 1/2\, x_5$$

$$= -2\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\right)x_5 - x_2 = -x_2 + x_5 - 3$$

$$f(x) = C_B^T x_B + C_N^T x_N$$

$$x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b$$

$$= C_B^T(B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + C_N^T x_N$$

$$= (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)\, x_N + C_B^T B^{-1} b$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline C_B^T & C_N^T & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline 0 & \underbrace{C_N^T - C_B^T B^{-1}N}_{\Omega} & -C_B^T B^{-1}b \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccccc|c} x_3 & x_4 & x_1 & x_5 & x_2 & & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/3 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

- QUEM ENTRA NA BASE: x_2

QUEM SAI DA BASE?

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{5/2}{3/3} = \frac{15}{16}$$

$$x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/2$$

na terceira equação ~~sai~~ não aparece x_2.

SAI x_4!

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc:cc:c} x_3 & x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc:cc:c}
1 & 8/3 & 0 & -1/2 & 0 & 5/2 \\
0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\
\hline
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Colocar na forma canônica: escalonamento.

$$
\left[\begin{array}{ccc:cc:c}
1 & 0 & 0 & 5/6 & -8/3 & 7/6 \\
0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \underbrace{1/2 \quad 1}_{r} & & 7/2
\end{array}\right]
$$

Nova solução básica:

$$(3/2, 1/2, 7/6, 0, 0)$$

$$f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(\tfrac{3}{2}\right) - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{7}{2} = -\tfrac{35}{10}$$

$$f\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{6}{5}\right) = -2\left(\tfrac{4}{5}\right) - \tfrac{6}{5} = -\tfrac{14}{5} = -\tfrac{28}{10}$$

CRITÉRIO DE PARADA: $r = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$,

EXEMPLO

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a}\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
& x_1 - x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

FORMA PADRÃO

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.}\ & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\
& x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 5
\end{aligned}
$$

- PRECISAMOS DE UMA SOLUÇÃO BÁSICA ADMISSÍVEL.

É tentador escolher x_3, x_4 e x_5, que aparecem apenas uma vez por linha e a função objetivo ~~está~~ estaria escrita nas variáveis não-básicas. Porém, isto não é possível, pois uma escolha de x_3, x_4, x_5 como solução básica dá

$$x_3 = -4, \quad x_4 = -12, \quad x_5 = 0$$

que não é admissível.

- Vamos escolher x_1, x_2 e x_3 como variáveis básicas

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]}_{B \qquad\qquad N \qquad\quad b} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Precisamos colocar o sistema na forma canônica para estas variáveis básicas: use escalonamento

$$\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -3/4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

solução básica: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 2$
$x_4 = 0, x_5 = 0.$

Devemos agora reescrever a função objetivo em termos das variáveis não-básicas.

$$x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b$$

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T x_B + c_N^T x_n \\ &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_n \\ &= (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_n + c_B^T (B^{-1}b) \end{aligned}$$

$$x_1 - \frac{1}{4} x_4 - \frac{3}{4} x_5 = 3$$
$$x_2 - \frac{1}{4} x_4 + \frac{1}{4} x_5 = 3$$

$$\begin{aligned} f(x) = 2x_1 + x_2 &= 2\left(3 + \frac{1}{4} x_4 + \frac{3}{4} x_5\right) + \left(3 + \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_5\right) \\ &= \frac{3}{4} x_4 + \frac{5}{4} x_5 + 9. \end{aligned}$$