DUALIDADE

AULA 11

PRIMAL	DUAL
$\min c^T x$	$\max \lambda^T b$
s.a $Ax \geq b$	s.a. $\lambda^T A \leq c^T$
$x \geq 0$	$\lambda \geq 0$

$$\min c^T x \quad \text{s.a} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

é equivalente a

$$\min c^T x \quad \text{s.a} \quad Ax \geq b, \quad -Ax \geq -b, \quad x \geq 0$$

que é equivalente a

$$\min c^T x \quad \text{s.a} \quad [A \;\; -A]\, x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}, \quad x \geq 0$$

O dual deste último problema é

$$\max \; [u^T \; v^T] \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$$\text{s.a} \quad [u^T \; v^T] \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \cancel{\geq} \leq c^T$$

$$u \geq 0$$

$$v \geq 0$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \max\ & u^Tb - v^Tb \\ \text{s.a}\ & u^TA - v^TA \le c^T \\ & u \geq 0,\ v \geq 0 \end{aligned}$$

Escrevendo $\lambda = u - v$, obtemos

$$\begin{aligned} \max\ & \lambda^T b \\ \text{s.a}\ & \lambda^T A \le c^T \end{aligned}$$

~~LEMA (VERSÃO FRACA DO TEOREMA DA DUALIDADE)~~
~~Se x é solução admissível de $\min c^Tx$ s.a $Ax=b$, $x\geq 0$ e~~
~~λ é solução admissível~~

LEMA (VERSÃO FRACA DO TEOREMA DA DUALIDADE)

Se x é solução (ponto) admissível de ~~...~~ $\begin{aligned} \min\ & c^Tx \\ \text{s.a}\ & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$ e

λ é solução (ponto) admissível de $\begin{aligned} \max\ & \lambda^Tb \\ \text{s.a}\ & \lambda^TA \geq c^T \end{aligned}$

então $c^Tx \geq \lambda^Tb$.

Demonstração:

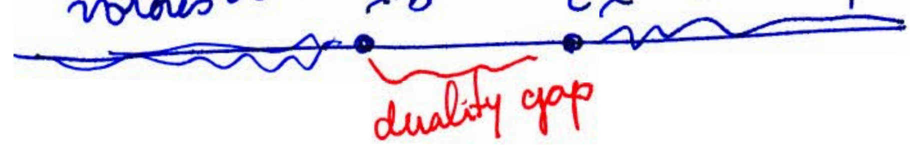
$$\lambda^Tb = \lambda^TAx \geq c^Tx$$

$\hookrightarrow x \geq 0$, $\lambda^TA \geq c^T$

$\blacksquare$

Um ponto admissível do primal dá uma cota superior para o valor ótimo do dual e um ponto admissível do dual dá uma cota inferior para o valor ótimo do primal.

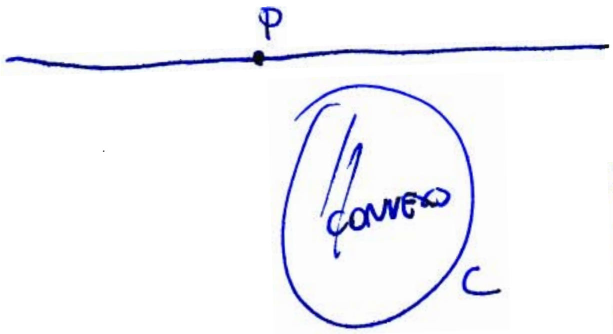
__COROLÁRIO.__ Se x^* e λ^* são pontos admissíveis para $\begin{array}{l}\min\ c^T x \\ \text{s.a } Ax=b \\ \quad x \geq 0\end{array}$ e $\begin{array}{l}\max\ \lambda^T b \\ \text{s.a } \lambda^T A \geq c^T\end{array}$, respectivamente, e $c^T x^* = \lambda^{*T} b$, então x^* e λ^* são valores ótimos para seus respectivos problemas.



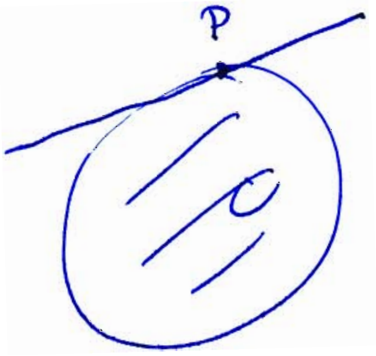
__TEOREMA DA DUALIDADE DA PROGRAMAÇÃO LINEAR__

Se um dos problemas de otimização $\begin{array}{l}\min\ c^T x \\ \text{s.a } Ax=b \\ \quad x \geq 0\end{array}$ ou $\begin{array}{l}\max\ \lambda^T b \\ \text{s.a } \lambda^T A \geq c^T\end{array}$ possui uma solução ótima, então o outro também possuirá uma solução e os valores ótimos das ~~funções~~ funções objetivos são iguais.
Se um dos problemas tem ~~f~~ uma função objetivo não-limitada, o outro problema tem conjunto admissível vazio.

Demonstração: Teorema ~~do Hiperplano~~ da Separação.



DADO UM CONJUNTO CONVEXO C
E UM PONTO P QUE NÃO
PERTENCE A C, EXISTE
HIPERPLANO QUE PASSA
POR P E QUE NÃO INTERCEPTA C.



DADO UM PONTO P NA
FRONTEIRA DE UM CONJUNTO
CONVEXO C, EXISTE
HIPERPLANO QUE PASSA POR P
E CONTÉM C EM UM DE
SEUS LADOS.

DUALIDADE ~~AULA 11~~

PRIMAL	DUAL
$\min\ c^Tx$	$\max\ \cancel{b^Ty}\ y^Tb$
s.a $Ax \geq b$	s.a $y^TA \leq c^T$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

$\min\ x_1 + 4x_2$	$\max\ 6y_1 + 7y_2$
s.a	s.a.
$2x_1 + x_2 \geq 6$	$2y_1 + 5y_2 \leq 1$
$5x_1 + 3x_2 \geq 7$	$y_1 + 3y_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

→ CALCULAR O DUAL ~~DE~~ DE

$$\min\ c^Tx \quad \text{s.a}\ Ax = b,\quad x \geq 0.$$

TEOREMA (DUALIDADE FRACA)

Se x e y são pontos admissíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, então

$$c^Tx \geq \cancel{b^Ty}\ y^Tb$$

VALORES DUAIS ~~b^Ty~~ y^Tb —————— c^Tx VALORES PRIMAIS

Demonstração. ~~$Ax \geq b$~~

pois $y^TA \leq c^T$ e $x \geq 0$

$$\cancel{b^Ty} = y^Tb \leq y^TAx \leq c^Tx$$

pois $b \leq Ax$ e $y \geq 0$

COROLÁRIO Se x e y são soluções admissíveis tais que $c^Tx = \cancel{b^Ty}$ y^Tb, então x e y são soluções ótimas.

TEOREMA DO EQUILÍBRIO

Suponha que x e y satisfaçam as seguintes condições de folgas complementares:

$$\text{se } (Ax)_i > b_i, \text{ então } y_i = 0 \text{ e} \qquad (*)$$
$$\text{se } (y^TA)_j < c_j, \text{ então } x_j = 0.$$

Então x e y são soluções ótimas para os problemas primal e dual, respectivamente. Reciprocamente, soluções ótimas ótimas devem satisfazer (*)

Demonstração. Vamos mostrar que se (*) vale, então x e y são tais que

$$c^Tx = b^Ty$$

e, com isto, pelo corolário anterior, x e y são soluções ótimas. Temos que

pois onde $b_i < (Ax_i)$, $y_i = 0$; $y_i \geq 0$

$$b^Ty = y^Tb \;\; \cancel{y^TAx} \geq (y^TA)x$$
$$\geq c^Tx$$

$b \leq Ax$. pois: $x \geq 0$ e onde $(y^TA)_i < (c^T)_i$, $x_i = 0$

~~Agora, se (*) vale, então, de fato, em (*) temos uma igualdade.~~ Como, pelo teorema de dualidade fraca, $y^Tb \leq c^Tx$, temos a igualdade: $y^Tb = c^Tx$

~~Por outro lado,~~

$$\cancel{c^T x \overset{(**)}{\geq} y^T A x}$$

~~↳ pois $x \geq 0$ e $c^T \geq y^T A$~~

~~Se vale (*) então, em (***), temos uma igualdade. Assim~~

$$\cancel{b^T y = y^T A x = c^T x.}$$

A segunda parte é um corolário do teorema da dualidade. Se x e y são soluções ótimas para seus respectivos problemas, então

$$c^T x = b^T y.$$

Isto implica que

$$c^T x = y^T A x \quad e \quad \underset{\substack{\| \\ y^T b}}{b^T y} = y^T A x$$

Então, obrigatoriamente, se

$$(y^T A)_i < c_i^T \implies x_i = 0$$

$$(Ax)_i > b_i \implies y_i = 0$$

TEOREMA DA DUALIDADE

Se o problema primal ou o problema dual possui uma solução ótima, então os dois problemas possuem soluções ótimas. Mais ainda, para estas soluções ótimas,

$$c^T x^* = \cancel{b^T y^*}\; y^{*T} b .$$

$c^T x$

Se não existem soluções ótimas, então duas possibilidades podem ocorrer: (a) os conjuntos admissíveis dos dois problemas são ambos vazios ou (b) um é vazio e o outro problema tem função objetivo não limitada (máximo é $+\infty$ e mínimo é $-\infty$).

Demonstração. ~~Usando variáveis de folga podemos reescrever as restrições do problema primal na~~

Vamos supor que o problema primal tenha uma solução ótima e ~~mostra~~ mostraremos que o problema dual também possui uma solução ótima. (O caso em que o dual possui uma solução ótima é ~~justificado~~ tratado da mesma maneira) convertendo o problema dual para ~~para~~ a forma

$$\begin{aligned} \min\ & -\cancel{b^T y}\; y^T b \\ \text{s.a.}\ & \cancel{y^T A}\; -A^T y \geq -c \\ & y \geq 0 . \end{aligned}$$

Usando variáveis de folga, podemos reescrever as restrições do problema primal na seguinte forma

$$[A\ -I]\begin{bmatrix}x\\ w\end{bmatrix}=b \qquad \begin{bmatrix}x\\ w\end{bmatrix}\geq 0$$

Após vários passos do método simplex, ~~as trocam~~ obteremos uma matriz na forma

$$[B\ \ N]$$

com custo $c^T=[c_b^T\ c_N^T]$. Em um ponto ótimo, vale que

$$r = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0.$$

e

$$c^T x = [c_B^T\ c_N^T]\begin{bmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{bmatrix} = c_B^T B^{-1} b$$

é o custo ~~mínimo~~ mínimo.

Escolhendo $y^T = c_B^T B^{-1}$, então

$\cancel{b^T(c_B^T B^{-1})}$

$\cancel{= c_B^T B^{-1}}$

$$y^T b = c_B^T B^{-1} b$$

$$= c^T x.$$

Resta mostrar que y satisfaz às restrições do problema dual: $y^T A \leq c^T$ e $y \geq 0$, isto é, dualizando em igualdades:

$$y^T \underbrace{[A \; -I]}_{\tilde{A}} \leq c^T \quad \cancel{e \; y \geq 0}.$$

↳ não precisa,

Aplicando-se as mesmas operações usadas no problema primal que conduziram à solução ótima na desigualdade acima, obtemos que

$$y^T [B \;\; N] \leq [c_B^T \;\; c_N^T]$$

Se $y^T = c_B^T B^{-1}$, então

$$y^T B = c_B^T B^{-1} B = c_B^T$$

$$y^T N = c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T$$

A desigualdade ocorre pela condição de otimalidade $\lambda = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$. ∎

$$\begin{array}{lll} \min c^T x & = \min c^T x & = \min c^T x \\ \text{s.a } Ax = b & \text{s.a } Ax \leq b & \text{s.a } \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ x \geq 0 & -Ax \leq -b & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

$$\max \; [b^T \; -b^T] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \max b^T \lambda$$

$$[u^T \; v^T] \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \geq c^T \qquad \text{s.a } \lambda^T A \geq c^T$$

$$u \geq 0 \quad v \geq 0$$