Aplicações de Álgebra Linear

Lista de Exercícios

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

01

Espaços e subespaços vetoriais

[01] Sejam $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0 \text{ e } b > 0\}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Defina as operações

$$\begin{array}{rrcl} \oplus\colon & V \times V & \to & V \\ & ((a,b),(c,d)) & \mapsto & (a,b) \oplus (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \odot\colon & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (\alpha,(a,b)) & \mapsto & \alpha \odot (a,b) = (a^\alpha, b^\alpha). \end{array}$$

(a) Mostre que $\oplus$ e $\odot$ estão bem definidas, isto é, que se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $(a,b),(c,d) \in V$, então $(a,b) \oplus (c,d) \in V$ e $\alpha \odot (a,b) \in V$.

(b) Mostre que $(V, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial.

[02] Demonstre as propriedades abaixo.

(1) O vetor nulo é único.

(2) O inverso aditivo é único.

(3) Se $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(4) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(5) Se $\alpha \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então $\alpha \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(6) $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

(7) $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(8) $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

[03] Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Defina as operações

$$\begin{array}{rrcl} \oplus\colon & V \times V & \to & V \\ & ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \mapsto & (x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \odot\colon & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (\alpha,(x,y)) & \mapsto & \alpha \odot (x,y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y). \end{array}$$

$(V, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial? Em caso negativo, quais condições da definição de espaço vetorial são violadas?

[04] Os conjuntos $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 0\}$ e $W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}$ são subespaços vetoriais de $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$? Justifique a sua resposta!

[05] Os conjuntos $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$ e $W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(A) \neq 0\}$ são subespaços vetoriais de $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$? Justifique a sua resposta! Lembre-se que se $A = (a_{ij})$, com $1 \leq i,j \leq n$, então

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

[06] (a) Mostre que o conjunto $C([a,b],\mathbb{R})$ de todas as funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) O conjunto $W = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = f(b)\}$ é um subespaço vetorial de $C([a,b],\mathbb{R})$? Justifique a sua resposta!

[07] (a) Mostre que o conjunto $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente deriváveis é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) O conjunto $W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' - 2f' + f = 0\}$ é um subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$? Justifique a sua resposta!

[08] Dada uma matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, seja W o conjunto de todas as matrizes em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que comutam com M:

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}.$$

O conjunto W é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$? Justifique a sua resposta!

[09] Mostre que se W_1 e W_2 são subespaços de V, então, $W_1 + W_2$ também é subespaço de V.

[10] Se W é um subespaço vetorial de V, o que é $W + W$?

[11] Sejam, W, W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Demonstre ou dê um contra-exemplo: se $W_1 + W = W_2 + W$, então $W_1 = W_2$.

[12] Sejam W, W_1 e W_2 subespaços de V, com $W_1 \subseteq W$ e $W_2 \subseteq W$. Mostre que as duas afirmações a seguir são equivalentes.

(a) $W = W_1 \oplus W_2$.

(b) Todo vetor $\mathbf{w} \in W$ se escreve de maneira única como soma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, onde $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$.

[13] (a) Sejam $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A = A^T\}$ e $W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A = -A^T\}$. Mostre que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = W_1 \oplus W_2$.

(b) Sejam $W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ é par}\}$ e $W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ é ímpar}\}$. Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

[14] Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V. Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

[15] Se $\mathcal{B}$ um subconjunto de um espaço vetorial V.

(a) Mostre que $[\mathcal{B}]$ é um subespaço vetorial de V.

(b) Mostre que $[\mathcal{B}]$ é a interseção de todos os subespaços vetoriais de V que contêm o conjunto $\mathcal{B}$. Mais precisamente, mostre que

$$[\mathcal{B}] = \bigcap_{\substack{W \supseteq \mathcal{B} \\ W \text{ é subespaço de } V}} W.$$

[16] Mostre que um subconjunto $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial V é LI se, e somente se, cada subconjunto finito de $\mathcal{B}$ é LI.

[17] Se os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são LI, prove que o mesmo se dá com os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1$. Vale a recíproca?

[18] Ache uma base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Quantos elementos tem esta base? E se considerarmos $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

[19] Prove que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ é um subconjunto LI de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

[20] Encontre uma base para o espaço vetorial

$$W=\left\{(x,y,\,w)\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\begin{array}{rcl} 5\,x+y+\;\;2\,z-\;\;3\,w &=& 0,\\ 6\,x+y-\;\;3\,z+\;\;2\,w &=& 0,\\ 3\,x+y+12\,z+\;\;2\,w &=& 0.\end{array}\right\}$$

[21] Encontre um contra-exemplo para a seguinte afirmação: se $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ é uma base para $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R},+,\,\cdot\,)$ e W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, então algum subconjunto de $\mathcal{B}$ é uma base de W.

[22] Dado o conjunto finito $X=\{p_1,\ldots,p_k\}$, obtenha uma base para o espaço vetorial $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

[23] (a) Encontre uma base para o espaço vetorial das matrizes reais simétricas:

$$W_1=\{A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\mid A=A^T\}.$$

(b) Encontre uma base para o espaço vetorial das matrizes anti-simétricas:

$$W_2=\{A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\mid A=-A^T\}.$$

[24] Mostre que se $V=W_1\oplus W_2$, então $\dim_{\mathbb{K}}(V)=\dim_{\mathbb{K}}(W_1)+\dim_K(W_2)$.

[25] Seja V um espaço vetorial e sejam W_1, W_2 dois subespaços vetoriais de V, ambos de dimensão finita. Mostre que

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1+W_2)=\dim_{\mathbb{K}}(W_1)+\dim_{\mathbb{K}}(W_2)-\dim_{\mathbb{K}}(W_1\cap W_2).$$

[26] Sejam W_1 e W_2 subespaços de dimensão 3 de um espaço vetorial de dimensão 5. Mostre que $W_1\cap W_2\neq\{\mathbf{0}\}$.

Respostas dos Exercícios

[11] A sentença é falsa: $W = \mathbb{R}^2$, $W_1 = [(1,0)]$ e $W_2 = [(0,1)]$ é um contra-exemplo.

[14] ($\Rightarrow$) Suponha, por absurdo, que $W_1 \cup W_2$ seja um subespaço vetorial de V, mas $W_1 \not\subseteq W_2$ e $W_2 \not\subseteq W_1$. Então existe $\mathbf{w}_1 \in W_1$ tal que $\mathbf{w}_1 \notin W_2$ e existe $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tal que $\mathbf{w}_2 \notin W_1$. Como $W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$ e $W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$, segue-se que $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 \cup W_2$. Agora $\mathbf{w} \notin W_1$ pois, caso contrário, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w} - \mathbf{w}_1$ seria um elemento de W_1. Do mesmo modo, $\mathbf{w} \notin W_2$ pois, caso contrário, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w} - \mathbf{w}_2$ seria um elemento de W_2. Assim, $\mathbf{w} \notin W_1$ e $\mathbf{w} \notin W_2$. Consequentemente, $\mathbf{w} \notin W_1 \cup W_2$, uma contradição.

($\Rightarrow$) Se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$ então $W_1 \cup W_2 = W_2$ ou $W_1 \cup W_2 = W_1$. Em qualquer um dos dois casos, $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 05/01/2010.