# Aplicações de Álgebra Linear

Lista de Exercícios

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

**02**

## Transformações lineares

[01] Mostre que cada uma das transformações abaixo é linear.

(a) $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{T}(x,y,z) = x + 2\,y + z$.

(b) $\mathbf{T}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dada por $(\mathbf{T}(p))(x) = x^2 \cdot p''(x)$.

(c) $\mathbf{T}\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $\mathbf{T}(X) = MX - XM$, onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[02] **(Rotações)** Em sala de aula, calculamos a fórmula para a rotação de $(x,y)$ em torno da origem $(0,0)$ por um ângulo $\theta$:

$$\mathbf{R}_\theta(x,y) = \big(\cos(\theta)\cdot x - \operatorname{sen}(\theta)\cdot y, \quad \operatorname{sen}(\theta)\cdot x + \cos(\theta)\cdot y\big)\,.$$

Calcule agora a fórmula para a rotação de $(x,y)$ em torno de $(a,b)$ por um ângulo $\theta$.

[03] **(Cisalhamentos)** Um cisalhamento em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da forma

$$\mathbf{T}(x,y) = (x, p\cdot x + y),$$

onde $p$ é uma constante.

(a) Mostre que $\mathbf{T}$ é uma transformação linear.

(b) Desenhe a imagem por $\mathbf{T}$ do quadrado $[0,1]\times[0,1]$.

[04] Mostre que $\mathscr{L}(U,V) = \{\mathbf{T}\colon U \to V \mid \mathbf{T} \text{ é linear}\}$ é um espaço vetorial.

[05] (a) Mostre que as seguintes transformações lineares

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{T}_{11}\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & \mathbf{T}_{11}(x_1,x_2) = (x_1,0) \end{array}, \qquad \begin{array}{rrcl} \mathbf{T}_{12}\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & \mathbf{T}_{12}(x_1,x_2) = (0,x_1) \end{array},$$

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{T}_{21}\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & \mathbf{T}_{21}(x_1,x_2) = (x_2,0) \end{array}, \qquad \begin{array}{rrcl} \mathbf{T}_{22}\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & \mathbf{T}_{22}(x_1,x_2) = (0,x_2) \end{array}$$

formam uma base para $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Conclua que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)) = 4$.

(b) Mais geralmente, mostre que as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_{1\,1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & (x_1,0,\ldots,0), \\ T_{1\,2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & (0,x_1,\ldots,0), \\ & \vdots & \\ T_{1m}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & (0,0,\ldots,x_1), \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_{2\,1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & (x_2,0,\ldots,0), \\ T_{2\,2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & (0,x_2,\ldots,0), \\ & \vdots & \\ T_{2m}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & (0,0,\ldots,x_2), \end{array}\right.$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} T_{n\,1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & (x_n, 0, \ldots, 0), \\ T_{n\,2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & (0, x_n, \ldots, 0), \\ & \vdots & \\ T_{nm}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & (0, 0, \ldots, x_n) \end{cases}$$

formam uma base para $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Conclua que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = n \cdot m$.

[06] Mostre que a composição de transformações lineares é ainda uma transformação linear.

[07] Mostre que uma função $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear se, e somente se, existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i.$$

[08] Seja $\mathbf{T}\colon U \to V$ uma transformação linear. Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Caso ela seja verdadeira, apresente uma demonstração e, caso ela seja falsa, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $\mathbf{u} \in U$ é tal que $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(b) Se $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{u}_2)$, então $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

(c) Se $\mathbf{u}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, então $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ é combinação linear de $\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$.

(d) Se $\{\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)\}$ é LI em $V$, então $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é LI em $U$.

(e) Se $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é LI em $U$, então $\{\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)\}$ é LI em $V$.

(f) Se $[\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)] = V$, então $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = U$.

(g) Se $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = U$, então $[\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)] = V$.

(h) Se $U = V$ e $[\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)] = U$, então $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = U$.

(i) Se $U = V$ e $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = U$, então $[\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)] = U$.

[09] Mostre que se $\mathbf{T}\colon U \to V$ é uma transformação linear inversível, então sua inversa $\mathbf{T}^{-1}\colon V \to U$ também é uma transformação linear.

[10] (a) Mostre que $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definido por $\mathbf{T}(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é uma transformação linear injetiva, mas não sobrejetiva.

(b) Mostre que $\mathbf{S}\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definido por $\mathbf{S}(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ é uma transformação linear sobrejetiva, mas não injetiva.

[11] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Caso ela seja verdadeira, apresente uma demonstração e, caso ela seja falsa, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva, então $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{T})) = n$.

(b) Se $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva, então $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\mathbf{T})) = n - m$.

(c) Se $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, com $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{S})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{T}))$, então

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{T} \circ \mathbf{S})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{S})).$$

[12] Sejam $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathscr{L}(U, U)$. Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Caso ela seja verdadeira, apresente uma demonstração e, caso ela seja falsa, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ é inversível, então $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ são inversíveis.

(b) Se $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ é inversível e $\dim_{\mathbb{K}}(U) < \infty$, então $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ são inversíveis.

[13] Sejam $\mathbf{T}\colon U \to V$ e $\mathbf{S}\colon V \to W$ transformações lineares. Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Caso ela seja verdadeira, apresente uma demonstração e, caso ela seja falsa, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ é sobrejetiva, então $\mathbf{S}$ é sobrejetiva.

(b) Se $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ é sobrejetiva, então $\mathbf{T}$ é sobrejetiva.

(c) Se $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ é injetiva, então $\mathbf{S}$ é injetiva.

(d) Se $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ é injetiva, então $\mathbf{T}$ é injetiva.

Mostre ainda que, se $U = V = W$ e $U$ tem dimensão finita, então estas quatro sentenças são verdadeiras.

[14] Calcule $(\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S})^{1000}$.

[15] Seja $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz na base canônica $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule a matriz $B$ de $\mathbf{T}$ na base

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \{(1,3),(2,4)\}.$$

(b) Calcule uma matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}$.

(c) Calcule $\mathbf{A}^n$, onde $n$ é um número natural positivo.

[16] Seja $\mathbf{T}\colon V \to V$ um operador linear definido em um espaço vetorial bidimensional $V$. Se a matriz de $\mathbf{T}$ com relação a uma base $\mathcal{V}$ de $V$ é

$$[\,\mathbf{T}\,]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

mostre que

$$\mathbf{T}^2 - (a+d) \cdot \mathbf{T} + (a \cdot d - b \cdot c) \cdot \mathrm{Id}_V = \mathbf{0}.$$

[17] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real com 64 linhas e 17 colunas. Se o posto de $\mathbf{A}$ é 11, quantos vetores independentes satisfazem a equação $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$? E quantos vetores independentes satisfazem $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$?

[18] Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes tais que o produto $\mathbf{AB}$ está definido. Mostre que

$$\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathrm{rank}(\mathbf{A}), \mathrm{rank}(\mathbf{B})\}.$$

[19] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ de posto $r$, $r \neq 0$. Mostre que existem matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ de ordens $m \times r$ e $r \times n$, respectivamente, tais que $\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{rank}(\mathbf{C}) = r$ e $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$. Esta decomposição é denominada *rank factorization* da matriz $\mathbf{A}$.

[20] Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes $m \times n$. Mostre que $\mathrm{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{rank}(\mathbf{A}) + \mathrm{rank}(\mathbf{B})$.

## Respostas dos Exercícios

[08] O item (h) é verdadeiro. Demonstração: sem perda de generalidade, podemos supor que o conjunto $\{\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_k)\}$ é LI e, portanto, uma base de $U$. Assim, $\dim_{\mathbb{K}}(U) = k$ e, pelo item (d) (que é verdadeiro), $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ também é LI. Como, $\#\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} = k$, segue-se que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ também é uma base de $U$. Em particular, $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = U$.

O item (i) é falso. Como contra-exemplo, considere $U = V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$ e $\mathbf{T}(x, y) = (0, 0)$.

[11] O item (c) é falso. Como contra-exemplo, considere $n = 2$, $\mathbf{S}(x, y) = (x, 0)$ e $\mathbf{T}(x, y) = (0, y)$. Temos que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{S})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{T})) = 1$, mas $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{T} \circ \mathbf{S})) = 0 \neq 1 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathbf{S}))$.

[12] O item (a) é falso. Contra-exemplo: $U = \mathbb{R}^\infty$, $\mathbf{T}(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $\mathbf{S}(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.

[13] (a) V.

(b) F. Contra-exemplo: $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(0, 0)\}$, $\mathbf{T}(x, y) = (x, 0)$ e $\mathbf{S}(x, y) = (0, 0)$.

(c) F. Contra-exemplo: $U = [(1, 0)]$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}(x, 0) = (x, 0)$ e $\mathbf{S}(x, y) = (x, 0)$.

(d) V.

Observação: para a segunda parte, a hipótese de que $U = V = W$ tenha dimensão finita é importante. De fato: considere $U = V = W = \mathbb{R}^\infty$, $\mathbf{T}(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $\mathbf{S}(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Note que $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\infty}$ é sobrejetiva, mas $\mathbf{T}$ não é sobrejetiva. Do mesmo modo, $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\infty}$ é injetiva, mas $\mathbf{S}$ não é injetiva.

[18] Um vetor $\mathbf{v}$ em $\mathcal{C}(\mathbf{AB})$ é da forma $\mathbf{ABx}$ para algum vetor $\mathbf{x}$. Como $\mathbf{v} = \mathbf{ABx} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$, concluímos que $\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$. Assim $\mathcal{C}(\mathbf{AB}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A})$. Logo,

$$\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(\mathbf{AB})) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}).$$

Usando agora este fato, temos que

$$\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = \mathrm{rank}(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T) \leq \mathrm{rank}(\mathbf{B}^T) = \mathrm{rank}(\mathbf{B}).$$

Consequentemente, $\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathrm{rank}(\mathbf{A}), \mathrm{rank}(\mathbf{B})\}$.

[19] Em sala de aula vimos que podemos escrever $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, onde $\mathbf{B}$ é $m \times r$ e $\mathbf{C} = r \times n$. Desde que as colunas de $\mathbf{B}$ são LI, $\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = r$. Desde que $\mathbf{C}$ tem $r$ linhas, $\mathrm{rank}(\mathbf{C}) \leq r$. Contudo, pelo exercício anterior, $r = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{BC}) \leq \min\{\mathrm{rank}(\mathbf{B}), \mathrm{rank}(\mathbf{C})\} \leq \mathrm{rank}(\mathbf{C})$. Logo, $\mathrm{rank}(\mathbf{C}) = r$.

[20] Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{XY}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{UV}$ as *rank factorizations* de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Então

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{XY} + \mathbf{UV} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}.$$

Então, pelo Exercício [18],

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \end{bmatrix}\right).$$

Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q$ bases de $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ e $\mathcal{C}(\mathbf{U})$, respectivamente. Qualquer vetor no espaço coluna de $\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \end{bmatrix}$ pode ser expresso como uma combinação linear destes $p + q$ vetores. Então

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \end{bmatrix}\right) \leq \mathrm{rank}(\mathbf{X}) + \mathrm{rank}(\mathbf{U}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) + \mathrm{rank}(\mathbf{B}).$$

**Texto composto em LaTeX2e, HJB, 06/01/2010.**