Matrizes e Decomposição LU

[01] Mostre que se $\mathbf{A}$ é uma matriz inversível, então $\mathbf{A}^T$ também é inversível e $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$.

[02] Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes reais tais que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, então dizemos que $\mathbf{B}$ é uma *inversa à direita* de $\mathbf{A}$ e que $\mathbf{A}$ é uma *inversa à esquerda* de $\mathbf{B}$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Dê um exemplo de uma matriz com mais do que uma inversa à direita.

(b) Mostre que uma matriz quadrada não pode possuir mais do que uma inversa à direita.

(c) Mostre que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são duas matrizes quadradas tais que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, então $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Em outras palavras, se $\mathbf{A}$ possui uma inversa $\mathbf{B}$ à direita, então $\mathbf{B}$ também é a inversa à esquerda de $\mathbf{A}$.

[03] Interprete geometricamente o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

em termos das linhas (interseção de retas) e das colunas (combinação linear de vetores).

[04] Usando eliminação gaussiana, obtenha a decomposição $\mathbf{LU}$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, use esta decomposição para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

[05] Usando eliminação gaussiana, obtenha a decomposição $\mathbf{LU}$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, use esta decomposição para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[06] Encontre todas as decomposições **LU** da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$, onde **L** tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

[07] Mostre que toda matriz da forma $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ possui infinitas decomposições **LU**.

[08] Mostre que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não possui uma decomposição **LU**.

[09] Verdadeiro ou falso? Se uma matriz **A** possui uma decomposição **LU**, onde **L** tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, então **A** também possui uma decomposição $\widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}}$ onde $\widetilde{\mathbf{U}}$ tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e $\widetilde{\mathbf{L}}$ é uma matriz triangular inferior qualquer.

[10] Suponha que você saiba as entradas de uma matriz **A** inversível e as entradas da componente **U** da decomposição **LU** de **A**. Que algoritmo você usaria para calcular **L**?

[11] Escreva um pseudocódigo para a solução por substituição progressiva de um sistema linear da forma $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, onde **L** é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

[12] No `MATLAB`, a função `rand(m,n)` gera uma matriz $m \times n$ cujas entradas são números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Considere os seguintes comandos:

```
n = 3; A = rand(n, n); B = 0.5*(A + A'); C = 0.5*(A - A');
```

que definem as variáveis `n` (dimensão), `A` (matriz quadrada gerada de maneira aleatória), `B` e `C`.

(a) Para diferentes valores de `x` (por exemplo, atribuindo-se `x = rand(n, 1)`), calcule as expressões `x'*A*x` e `x'*B*x` no `MATLAB`. O que você observa? Tente fazer uma conjectura e prove-a!

(b) Para diferentes valores de `x` (por exemplo, atribuindo-se `x = rand(n, 1)`), calcule a expressão `x'*C*x` no `MATLAB`. O que você observa? Tente fazer uma conjectura e prove-a!

Respostas dos Exercícios

[02] (a) Tome $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ são duas inversas à direita de $\mathbf{A}$.

(b) Suponha que exista uma matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, todas de tamanho $n \times n$. Isto significa que as colunas da matriz identidade se escrevem como combinação linear das colunas da matriz $\mathbf{A}$, sendo os coeficientes dados pelas entradas da matriz $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{e}_k = b_{1k} \cdot \mathbf{a}_1 + b_{2k} \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + b_{nk} \cdot \mathbf{a}_n,$$

para $1 \leq k \leq n$. Como as n colunas de $\mathbf{I}$ geram $\mathbb{R}^n$, concluímos que as n colunas de $\mathbf{A}$ também geram $\mathbb{R}^n$. Em particular, as colunas de $\mathbf{A}$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$. Desta maneira, os coeficientes b_{jk} são unicamente determinados.

(c) Seja $\mathbf{C} = \mathbf{BA} - \mathbf{I} + \mathbf{B}$. Então

$$\mathbf{AC} = \mathbf{ABA} - \mathbf{AI} + \mathbf{AB} = \mathbf{IA} - \mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{I}.$$

Assim, $\mathbf{C}$ (como $\mathbf{B}$) é uma inversa à direita de $\mathbf{A}$. Pelo item anterior, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Então $\mathbf{C} = \mathbf{BA} - \mathbf{I} + \mathbf{B}$ implica em $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

[09] A sentença é falsa. Como contra-exemplo, considere $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{U} = \mathbf{0}$.

[10] Note que $\mathbf{A} = \mathbf{LU} \Rightarrow \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T = \mathbf{A}^T$, com $\mathbf{U}^T$ uma matriz triangular inferior. Assim, as colunas $\mathbf{l}_k^T$ de $\mathbf{L}^T$ (para $1 \leq k \leq n$) podem ser calculadas usando-se substituições retroativas: $\mathbf{U}^T\mathbf{l}_k^T = \mathbf{a}_k^T$ (para $1 \leq k \leq n$).

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 10/01/2009.