Matrizes Positivas Definidas, Mais Aplicações e Ortogonalidade

[01] Mostre que se uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ é positiva definida, então $\mathbf{A}_{n\times n}$ é uma matriz inversível.

[02] Mostre que se uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ é (estritamente) diagonal dominante, então $\mathbf{A}_{n\times n}$ é uma matriz inversível.

[03] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real simétrica. Mostre que se $\mathbf{A}$ possui uma decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, com $\mathbf{L}$ uma matriz triangular inferior com diagonal positiva, então esta decomposição é única.

[04] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real simétrica. Mostre que as duas sentenças abaixo são equivalentes.

(1) $\mathbf{A}$ é positiva definida.

(2) $\mathbf{A}$ possui uma única decomposição na forma $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, onde $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal positiva.

[05] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real simétrica. Mostre que as duas sentenças abaixo são equivalentes.

(1) $\mathbf{A}$ é positiva definida.

(2) Todos os menores principais líderes de $\mathbf{A}$ são positivos.

[06] **(Equações diferenciais)** O objetivo deste exercício é mostrar como sistemas lineares podem ser usados para obter uma aproximação do seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in (0,1), \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

onde α e β são duas constantes reais, c é uma função contínua não-negativa definida em $[0,1]$ e f é uma função contínua definida em $[0,1]$. Defina

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad u_i = u(x_i), \quad c_i = c(x_i), \quad f_i = f(x_i), \qquad \text{para } 0 \leq i \leq n.$$

(a) Mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(p+h) - 2\,u(p) + u(p-h)}{h^2} = u''(p)$$

(dica: use a regra de L'Hôpital). Tomando $p = x_i$ e $h = 1/n$, conclua que

$$-u''(x_i) \approx \frac{2\,u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})}{n^{-2}}. \tag{2}$$

(b) Substituindo $-u''(x_i)$ pela aproximação discreta (2) na equação diferencial (1), mostre que os valores u_i satisfazem as seguintes $n-1$ equações algébricas:

$$\frac{2\,u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{n^{-2}} + c_i u_i = f_i, \qquad 1 \leq i \leq n-1,$$

mais as duas condições de contorno: $u_0 = \alpha$, $u_n = \beta$. Conclua que $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_{n-1} \end{bmatrix}^T$ satisfaz o sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

onde

$$\mathbf{A} = n^2 \begin{bmatrix} 2 + \frac{c_1}{n^2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 + \frac{c_2}{n^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 + \frac{c_{n-2}}{n^2} & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 + \frac{c_{n-1}}{n^2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha n^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} + \beta n^2 \end{bmatrix}.$$

Observe que $c(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$, então $\mathbf{A}$ é uma matriz (estritamente) diagonal dominante.

(c) Mostre que

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i^2 + n^2 \left[v_1^2 + v_{n-1}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (v_i - v_{i-1})^2 \right]$$

Conclua que $\mathbf{A}$ é positiva definida, logo inversível.

(d) Considerando $n = 20$, $c(x) = 4$ para todo $x \in [0, 1]$, $f(x) = 4(\pi^2+1)\, x \operatorname{sen}(2\pi x) - 4\,\pi \cos(2\,\pi x)$ e $\alpha = \beta = 0$, use o `MATLAB` para resolver o sistema linear correspondente. Com os valores de u_i, desenhe, em um mesmo sistema de eixos coordenados, os pontos (x_i, u_i) e o gráfico da solução $y = u(x) = x \operatorname{sen}(2\,\pi\, x)$ deste problema de valor inicial.

[07] **(Opcional: splines cúbicos)** Sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) pontos no plano. Por comodidade, vamos supor que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Queremos encontrar uma função

$$f \colon [x_1, x_n] = \bigcup_{j=1}^{n} [x_j, x_{j+1}] \to \mathbb{R}$$

que seja de classe C^2, satisfazendo $f(x_j) = y_j$ e de tal maneira que f restrita ao intervalo $[x_j, x_{j+1}]$,

$$f|_{[x_j, x_{j+1}]}\,,$$

seja uma função polinomial de grau ≤ 3. Para isto, inicialmente, vamos supor que sejam conhecidos os valores de $d^2 f/dx^2$ nos pontos x_j:

$$y''_j := \frac{d^2 f}{dx^2}(x_j).$$

Lembrando que, para $x \in [x_j, x_{j+1}]$, a função $l(x) = A(x)\, y_j + B(x)\, y_{j+1}$, com

$$A(x) := \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \qquad \text{e} \qquad B(x) := \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = 1 - A(x),$$

fornece uma interpolação linear por partes para os pontos (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n), vamos procurar nossa função f na forma

$$f(x) = l(x) + C(x)\, y''_j + D(x)\, y''_{j+1} = A(x)\, y_j + B(x)\, y_{j+1} + C(x)\, y''_j + D(x)\, y''_{j+1},$$

com $C = C(x)$ e $D = D(x)$ funções polinomiais de grau ≤ 3. Como queremos que $f(x_j) = y_j$, as funções C e D devem satisfazer

$$C(x_j) = C(x_{j+1}) = D(x_j) = D(x_{j+1}) = 0, \tag{3}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Mais ainda, como f deve ser de classe C^2, é razoável tomar

$$\frac{d^2 C}{dx^2}(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2 D}{dx^2}(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}. \tag{4}$$

(a) Mostre que se C e D satisfazem as condições (3) e (4), então, obrigatoriamente,

$$C(x) = \frac{1}{6}\left((A(x))^3 - A(x)\right)(x_{j+1} - x_j)^2 \tag{5}$$

e

$$D(x) = \frac{1}{6}\left((B(x))^3 - B(x)\right)(x_{j+1} - x_j)^2. \tag{6}$$

Dica: integre as equações (4) duas vezes sucessivamente e use as condições de contorno (3)!

(b) Mostre que

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{3\,(A(x))^2 - 1}{6}(x_{j+1} - x_j)\, y''_j + \frac{3\,(B(x))^2 - 1}{6}(x_{j+1} - x_j)\, y''_{j+1} \tag{7}$$

e que

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = A(x)\, y''_j + B(x)\, y''_{j+1}. \tag{8}$$

Conclua que, de fato, $(d^2 f/dx^2)(x_j) = y''_j$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

(c) Como f deve ser de classe C^2, em particular, sua derivada df/dx deve ser contínua em cada ponto x_j, $j = 2, \ldots, n-1$. Assim

$$\frac{df}{dx}(x_j -) = \frac{df}{dx}(x_j +),$$

com $j = 2, \ldots, n-1$. A partir desta equação, conclua que os y''_j satisfazem as equações

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6}\, y''_{j-1} + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3}\, y''_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{6}\, y''_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \tag{9}$$

isto é, os y''_j satisfazem um sistema linear tridiagonal com $n-2$ equações e n variáveis.

O sistema linear definido por (9) é indeterminado. Existem duas maneiras clássicas de obter um sistema determinado.

(1) Tomar $y''_1 = y''_n = 0$. A função interpoladora f, neste caso, é denominada *spline cúbico natural*.

(2) Fornecer os valores das derivadas de ordem 1 de f nos pontos x_1 e x_n e acrescentar as equações (7) com $x = x_1$ e $x = x_n$ às equações do sistema (9).

(d) Escreva o sistema linear (9) para o conjunto de pontos

$$\mathcal{C} = \{(+0, +1), (+1, +1), (+2, +1), (+3, -1), (+4, -1), (+5, -1)\}$$

usando as abordagens (a) e (b). No caso (b), suponha que

$$\frac{df}{dx}(0) = +0 \qquad \text{e} \quad \frac{df}{dx}(5) = -1.$$

Resolva cada sistema e, em um mesmo sistema de eixo coordenados, desenhe os pontos de $\mathcal{C}$ e os dois splines interpoladores.

[08] Seja $\mathbf{T}\colon U \to V$ uma transformação linear injetora. Se $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ é um produto escalar em V, mostre que

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle_U = \langle \mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \mathbf{T}(\mathbf{u}_2)\rangle_V$$

define um produto escalar em U.

Corolário: se U é um subespaço vetorial de V e V possui um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, então considerando-se $\mathbf{T}$ como a inclusão natural de U em V (isto é, a transformação identidade restrita a U), pelo resultado anterior, teremos como consequência que $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ restrito a $U\times U$ é um produto interno em U.

[09] **(Identidades de polarização)** Considere um espaço vetorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot\,)$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$.

(a) Mostre que se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\,||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 - \frac{1}{4}\,||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2$.

(b) Mostre que se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\,||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 - \frac{1}{4}\,||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2 + \frac{i}{4}\,||\mathbf{u}+i\,\mathbf{v}||^2 - \frac{i}{4}\,||\mathbf{u}-i\mathbf{v}||^2$.

[10] Demonstre o teorema de Pitágoras: se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais, então $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2$.

[11] Use a desigualdade de Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para provar que, dados valores reais positivos a_1, a_2 e a_3 em $\mathbb{R}$, então

$$(a_1 + a_2 + a_2)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

[12] Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal.

[13] Mostre que as sentenças abaixo são equivalentes. Considere $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

(1) $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal real.

(2) $\mathbf{Q}$ preserva norma: $||\mathbf{Q}\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(3) $\mathbf{Q}$ preserva distância: $||\mathbf{Q}\mathbf{u} - \mathbf{Q}\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(4) $\mathbf{Q}$ preserva produto interno: $\langle \mathbf{Q}\mathbf{u}, \mathbf{Q}\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(5) $\mathbf{Q}$ leva base ortonormais de $\mathbb{R}^n$ em bases ortonormais de $\mathbb{R}^n$.

[14] Mostre que a matriz de rotação $\mathbf{R}_\theta$ (veja a definição no arquivo PDF da Aula 2) é uma matriz ortogonal. O que é $\mathbf{R}_a\mathbf{R}_b$? Deduza as identidades trigonométricas para $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\cos(a+b)$ a partir da multiplicação $\mathbf{R}_a\mathbf{R}_b$.

[15] Seja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Mostre que $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ é uma matriz ortogonal (ela é uma reflexão com relação ao plano $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0\}$, também conhecida como transformação de Householder). Calcule $\mathbf{Q}$ quando $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

[16] Aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e escreva o resultado na forma $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$.

Respostas dos Exercícios

[01] Suponha, por absurdo, que $\mathbf{A}$ não seja inversível. Então $\mathbf{A}$ não é injetiva, logo $\text{Ker}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$, isto é, existe $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Então, $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{0} = 0$. Mas isto contradiz a hipótese de $\mathbf{A}$ ser positiva definida.

[02] Suponha, por absurdo, que $\mathbf{A}$ não seja inversível. Então $\mathbf{A}$ não é injetiva, logo $\text{Ker}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$, isto é, existe $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $||\mathbf{v}||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |v_i| = 1 = v_k$ para algum índice k. Assim:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}v_j = 0,$$

de modo que $-a_{kk} = -v_k a_{kk} = \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{kj}v_j$. Então,

$$|a_{kk}| = |-a_{kk}| = \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{kj}v_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}||v_j| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|.$$

Mas isto contradiz a hipótese de $\mathbf{A}$ ser estritamente diagonal dominante.

[03] Suponha que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{L}}^T$. Então $\widetilde{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^T\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1}$ é uma matriz triangular inferior e superior ao mesmo tempo, logo

$$\widetilde{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^T\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \mathbf{D}$$

é uma matriz diagonal. Calculando-se os elementos da diagonal principal de $\widetilde{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{L}$ e $\widetilde{\mathbf{L}}^T\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1}$, vemos que

$$\frac{1}{\widetilde{l}_{kk}} \cdot l_{kk} = \widetilde{l}_{kk} \cdot \frac{1}{l_{kk}}, \qquad \text{para todo } k = 1, \ldots, n.$$

Assim, $\left(\widetilde{l}_{kk}\right)^2 = \left(l_{kk}\right)^2$. Como as diagonais de $\mathbf{L}$ e $\widetilde{\mathbf{L}}$ são positivas, segue-se que $\widetilde{l}_{kk} = l_{kk}$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Assim,

$$d_{kk} = \frac{1}{\widetilde{l}_{kk}} \cdot l_{kk} = \widetilde{l}_{kk} \cdot \frac{1}{l_{kk}} = 1,$$

para todo $k = 1, \ldots, n$. Isto mostra que $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ e, consequentemente, $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}$.

[04] (1) $\Rightarrow$ (2): como $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq 0$, segue-se que $\mathbf{A}$ é inversível (veja o argumento do Exercício [01]). Mais ainda, considerando-se os vetores da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$, vemos que as submatrizes correspondentes aos menores principais líderes são também positivas definidas. Em particular, todos os menores principais líderes da matriz $\mathbf{A}$ são diferentes de zero. Assim, por um teorema visto em sala de aula, $\mathbf{A}$ tem uma uma decomposição $\mathbf{LU}$, onde $\mathbf{L}$ tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. Como $\mathbf{A}$ é simétrica, segue-se que

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T.$$

Sendo assim,

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T.$$

O lado esquerdo desta equação é uma matriz triangular superior, enquanto que o lado direito é uma matriz triangular inferior. Assim,

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T = \mathbf{D}$$

é uma matriz diagonal. Concluímos então que $\mathbf{U}\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \mathbf{D}$ e, portanto, $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T$. Podemos então escrever que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$. Todos os elementos da diagonal principal de $\mathbf{D}$ são positivos, pois

$$d_{kk} = \mathbf{e}_k^T\mathbf{D}\mathbf{e}_k = \left(\mathbf{L}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{e}_k\right)^T\mathbf{D}(\mathbf{L}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{e}_k) = \left((\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{e}_k\right)^T\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T((\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{e}_k) = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} > 0,$$

onde $\mathbf{v} = (\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{e}_k$, com $\mathbf{e}_k$ o k-ésimo vetor da base canônica. Agora, se $\widetilde{\mathbf{D}}$ representa a matriz diagonal com $\widetilde{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$, vemos que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{D}}^T\mathbf{L}^T = (\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}})(\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}})^T = \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{L}}^T,$$

onde $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}}$. Isto mostra que $\mathbf{A}$ tem uma decomposição de Cholesky.

(2) $\Rightarrow$ (1): como $\mathbf{L}$ é inversível, segue-se que $\mathbf{L}^T$ também é inversível. Assim, $\mathbf{L}^T\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Portanto,

$$\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{v} = (\mathbf{L}^T\mathbf{v})^T(\mathbf{L}^T\mathbf{v}) = \left\|\mathbf{L}^T\mathbf{v}\right\| > 0.$$

Isto mostra que $\mathbf{A}$ é positiva definida.

[05] (1) $\Rightarrow$ (2): se $\mathbf{A}$ é positiva definida, então $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ para alguma matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ com diagonal positiva. Decompondo $\mathbf{A}$ em blocos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}^T & \mathbf{L}_{21}^T \\ \mathbf{L}_{12}^T & \mathbf{L}_{22}^T \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\det(\mathbf{A}_{11}) = \det(\mathbf{L}_{11}\mathbf{L}_{11}^T) = (\det(\mathbf{A}_{11}))^2 > 0$. Aplicando este argumento para blocos $\mathbf{A}_{11}$ de tamanho $k \times k$, para $k = 1, \ldots, n$, concluímos que todos os menores principais líderes de $\mathbf{A}$ são positivos.

(2) $\Rightarrow$ (1): como, por hipótese, todos os menores principais líderes são positivos, em particular, eles são diferentes de zero. Assim, por um teorema visto em sala de aula, $\mathbf{A}$ tem uma uma decomposição $\mathbf{L}\mathbf{U}$, onde $\mathbf{L}$ tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. Como $\mathbf{A}$ é simétrica, segue-se que

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T.$$

Sendo assim,

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T.$$

O lado esquerdo desta equação é uma matriz triangular superior, enquanto que o lado direito é uma matriz triangular inferior. Assim,

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T = \mathbf{D}$$

é uma matriz diagonal. Concluímos então que $\mathbf{U}\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \mathbf{D}$ e, portanto, $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T$. Podemos então escrever que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$. Note que os menores principais líderes $|\mathbf{A}_k|$ de ordem k de $\mathbf{A}$ iguais a $d_{11}\cdot\cdots\cdot d_{kk}$. Como, por hipótese, $|\mathbf{A}_1| = d_{11} > 0$, $|\mathbf{A}_2| = d_{11}\cdot d_{22} > 0$, $\ldots$, $|\mathbf{A}_n| = d_{11}\cdot\cdots\cdot d_{nn} > 0$, concluímos que todos os elementos da diagonal principal de $\mathbf{D}$ são positivos. Agora, se $\widetilde{\mathbf{D}}$ representa a matriz diagonal com $\widetilde{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$, vemos que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{D}}^T\mathbf{L}^T = (\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}})(\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}})^T = \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{L}}^T,$$

onde $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{D}}$. Isto mostra que $\mathbf{A}$ tem uma decomposição de Cholesky $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{L}}^T$, onde $\widetilde{\mathbf{L}}$ tem diagonal positiva. Logo, pelo exercício anterior, $\mathbf{A}$ é positiva definida.

[11] Basta usar a desigualdade de Schwarz com os vetores

$$\mathbf{u} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = (1/\sqrt{a_1}, 1/\sqrt{a_2}, 1/\sqrt{a_3}).$$

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 14/01/2010.

Apêndice: código MATLAB para a solução da EDO do Exercício [06]

```
function c=edo_c(x)
c = 4*ones(size(x));
return

function f=edo_f(x)
f = 4*(pi^2+1)*x.*sin(2*pi*x) - 4*pi*cos(2*pi*x);
return


% Example:
%
% [x, s] = edo_s(20, @edo_c, @edo_f, 0, 0)
% plot(x, s, 'o')
function [x, s] = edo_s(n, c, f, alpha, beta, varargin)
x = 1/n*(1:n-1);
cx = feval(c, x, varargin{:});
b = feval(f, x, varargin{:});
b(1) = b(1) + alpha*n^2;
b(n - 1) = b(n - 1) + beta*n^2;
A = diag(-n^2*ones(n-2,1),1)+diag(-n^2*ones(n-2,1),-1) + ...
    diag(2*n^2*ones(n-1, 1), 0) + diag(cx, 0);
s = A\b';
x = [0, x, 1];
s = [alpha, s', beta];
return
```