Produto Interno e Ortogonalidade

[01] Mostre que se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

[02] (a) Mostre que se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$.

(b) Mostre que se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$.

(c) Mostre que se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = 0$, então $\mathbf{A} = 0$.

(d) Mostre que
$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$$
define um produto interno em $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

[03] Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno e seja $\mathbf{T}\colon U \to V$ uma transformação linear.

(a) Dado $\mathbf{v} \in V$, mostre que existe um único vetor $\widetilde{\mathbf{u}} \in U$ tal que
$$\langle \mathbf{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}} \rangle_U$$
para todo $\mathbf{u} \in U$.

(b) O item (a) permite definir uma aplicação
$$\begin{array}{rccl} \mathbf{T}^*\colon & V & \to & U \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{T}^*(\mathbf{v}) = \widetilde{\mathbf{u}}, \end{array}$$
onde $\widetilde{\mathbf{u}}$ é o único vetor em U tal que $\langle \mathbf{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}} \rangle_U$. Mostre que $\mathbf{T}^*$ é uma transformação linear, denominada *adjunta* de $\mathbf{T}$.

(c) Sejam $\mathbf{B}_U$ e $\mathbf{B}_V$ bases ortonormais de U e V, respectivamente. Mostre que se $A = (a_{ij})$ é a matriz de $\mathbf{T}$ com relação às bases U e V, então a matriz de $\mathbf{T}^*$ com relação as estas mesmas bases é $\mathbf{A}^* = (\overline{a_{ji}})$. Note que se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$.

[04] Seja $V = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ com o produto interno dado por
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx.$$
Seja $W \subset V$ o subespaço vetorial formado pelas funções ímpares, isto é,
$$W = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in [-1,1]\}.$$
Determine o complemento ortogonal $W^\perp$ de W.

[05] Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se W é um subespaço vetorial de V, mostre que $(W^\perp)^\perp = W$.

Respostas dos Exercícios

[03] (a) Seja $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ortonormal de U. Defina

$$\widetilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle \mathbf{T}(\mathbf{u}_i), \mathbf{v} \rangle_V} \cdot \mathbf{u}_i.$$

Os funcionais lineares $\mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V$ e $\mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}} \rangle_U$ coincidem em uma base de U. Logo, eles coincidem sempre. Para a unicidade, considere dois vetores $\widetilde{\mathbf{u}}_1$ e $\widetilde{\mathbf{u}}_2$ tais que

$$\langle \mathbf{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}}_1 \rangle_U = \langle \mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}}_2 \rangle_U$$

para todo $\mathbf{u} \in U$. Em particular, $\langle \mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}}_1 - \widetilde{\mathbf{u}}_2 \rangle_U = 0$, para todo $\mathbf{u} \in U$. Escolhendo $\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}}_1 - \widetilde{\mathbf{u}}_2$, concluímos que $\widetilde{\mathbf{u}}_1 - \widetilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{0}$, isto é, $\widetilde{\mathbf{u}}_1 = \widetilde{\mathbf{u}}_2$.

[04] Seja U o espaço vetorial das funções pares. Como o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar e integrais de funções ímpares no intervalo $[-1, 1]$ é zero, certamente $U \subseteq W^\perp$. Seja agora $f \in W^\perp$. Podemos escrever f, de maneira única, como soma de uma função par com uma função ímpar: $f = f_P + f_I$. Agora, para todo $g \in W$,

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} (f_P(x) + f_I(x)) \cdot g(x)\, dx = 0 \\
&\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} f_P(x) \cdot g(x)\, dx + \int_{-1}^{1} f_I(x) \cdot g(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} f_I(x) \cdot g(x)\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Como esta última igualdade é válida para qualquer função g ímpar, podemos escolher $g = f_I$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} f_I(x) \cdot f_I\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f_I, f_i \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad f_I = 0.$$

Logo, $f = f_P + f_I = f_P \in U$. Isto mostra que $W^\perp \subseteq U$ e, consequentemente, $U = W^\perp$.

[05] Se $\mathbf{w} \in W$, então $\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{u} \in W^\perp$. Logo, que $\mathbf{w} \in (W^\perp)^\perp$ e, sendo assim, concluímos que W é subespaço vetorial de $(W^\perp)^\perp$. Por outro lado,

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) + \dim_{\mathbb{K}}(W^\perp) = \dim_{\mathbb{K}}(W^\perp) + \dim_{\mathbb{K}}((W^\perp)^\perp),$$

isto é, $\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}((W^\perp)^\perp)$. Logo, $W = (W^\perp)^\perp$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 17/01/2010.