Aplicações de Álgebra Linear

Lista de Exercícios

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

07

O Teorema Fundamental da Álgebra Linear, Quadrados Mínimos, Transformações de Householder e Rotações de Givens

[01] Mostre que o sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui pelo menos uma solução se, e somente se,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{b}^T\mathbf{y} = 0.$$

[02] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real $m \times n$. Mostre que a transformação linear

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{T}\colon & \mathcal{R}(\mathbf{A}) & \to & \mathcal{C}(\mathbf{A}) \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \end{array}$$

é inversível. Aqui $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ representa o espaço vetorial gerado pelas linhas de $\mathbf{A}$ e $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ representa o espaço vetorial gerado pelas colunas de $\mathbf{A}$.

[03] O teorema fundamental da álgebra linear é frequentemente enunciado na forma da *alternativa de Fredholm*: para quaisquer $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$, um, e somente um, dos sistemas abaixo possui pelo menos uma solução:

(1) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(2) $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^T\mathbf{b} \neq 0$.

Em outras palavras, ou $\mathbf{b}$ está em $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ ou existe $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{A}^T)$ tal que $\mathbf{y}^T\mathbf{b} \neq 0$. Mostre que, de fato, o sistemas (1) e (2) não podem possuir pelo menos uma solução simultaneamente.

[04] Seja $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a projeção em $W = [\mathbf{u}]$, com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ usando o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onde $\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{||\mathbf{u}||^2}$.

(b) Mostre que $A^2 = A$.

(c) Mostre que $\operatorname{tr}(A) = 1$.

(d) A é uma matriz inversível? Justifique a sua resposta!

[05] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Se ela for verdadeira, apresente uma demonstração. Se ela for falsa, apresente um contra-exemplo.

(a) Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial com produto interno. Se U é ortogonal a V, então $U^\perp$ é ortogonal a $V^\perp$.

(b) Se U é ortogonal a V e V é ortogonal a W, então U é ortogonal a W.

[06] Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule os pontos críticos da função $f(x_1, x_2) = ||\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}||^2$ (aqui $||\cdot||$ é a norma euclidiana) e os compare com a solução das equações normais $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

[07] Seja $\mathbf{P}$ a projeção em um subespaço vetorial W e $\mathbf{Q}$ a projeção no complemento ortogonal W^T. O que é $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$? E $\mathbf{PQ}$? Mostre que $\mathbf{P}-\mathbf{Q}$ é igual a sua própria inversa.

[08] Mostre que se $\mathbf{P}=\mathbf{P}^T\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}$ é uma matriz de projeção.

[09] Seja $\mathbf{P}$ a matriz de projeção de um vetor em $\mathbb{R}^3$ no plano-xy. Desenhe uma figura para descrever o efeito da *matriz de reflexão* $\mathbf{H}=\mathbf{I}-2\,\mathbf{P}$. Explique geometricamente e algebricamente, por que $\mathbf{H}^2=\mathbf{I}$.

[10] Se $\mathbf{P}_C=\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ é a projeção sobre o espaço das colunas de $\mathbf{A}$, qual é a projeção $\mathbf{P}_R$ sobre o espaço das colunas de $\mathbf{A}$?

[11] Mostre que a melhor aproximação pelo métodos dos quadrados mínimos para um conjunto de medidas y_1, …, y_m por uma reta horizontal (isto é, por uma função constante $y=c$) é a média

$$c=\frac{y_1+\cdots+y_m}{m}.$$

Em termos estatísticos, a escolha $\overline{y}$ que minimiza o erro $E^2(y)=(y_1-y)^2+\cdots+(y_m-y)^2$ é igual a *média* da amostra. O valor $E^2(\overline{y})$ é denominado a *variância* σ^2 da amostra.

[12] **(O algoritmo QR)** Texto extraído do livro *Numerical Computing with* MATLAB, escrito por Cleve Moler, programador original do `MATLAB`:

> *"The QR algorithm is one of the most important, widely used, and successful tools we have in technical computation. Several variants of it are in the mathematical core of* MATLAB. *They compute the eigenvalues of real symmetric matrices, real nonsymmetric matrices, and pairs of complex matrices, and the sigular values of general matrices."*

Dada uma matriz $\mathbf{A}_0=\mathbf{A}$, calcule sua decomposição $\mathbf{QR}$: $\mathbf{A}_0=\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ e, então, troque permute os fatores: $\mathbf{A}_1=\mathbf{R}_0\mathbf{Q}_0$. As matrizes $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_0$ são matrizes semelhantes, pois $\mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{Q}_0=\mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0)\mathbf{Q}_0=\mathbf{A}_1$. Desta maneira, a continuação do processo sempre obtém uma matriz com os mesmos autovalores da matriz original:

$$\mathbf{A}_k=\mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k \quad \text{e, então,} \quad \mathbf{A}_{k+1}=\mathbf{R}_k\mathbf{Q}_k.$$

Sob certas hipóteses, é possível mostrar que $\mathbf{A}_k$ converge para uma matriz triangular cujos elementos da diagonal principal são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. Este método numérico para se calcular autovalores é conhecido como *unshift* **QR** *algorithm*. Para detalhes, aperfeiçoamentos e demonstrações do algoritmo, consulte o livro *Applied Numerical Linear Algebra* do autor Demmel. O objetivo deste exercício é fazer experimentos com o algoritmo **QR** no `MATLAB`.

(a) Escolha quatro números reais distintos: `r = [1 2 3 4]`.

(b) Defina uma matriz $\mathbf{A}$ cujos autovalores sejam as entradas do vetor `r`. Dica: calculo os valores das constantes c_0, c_1, c_2 e c_3 tais que $c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+x^4=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ e tome $\mathbf{A}$ como a *matriz companheira*:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -c_3 \end{bmatrix}.$$

(c) Aplique a interação **QR**: `n = 40; for i=1:n [Q, R] = qr(A); A = R*Q; end; A`.

[13] Considere a transformação de Householder $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, onde

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} - ||\mathbf{v}||\mathbf{e}_1}{||\mathbf{v} - ||\mathbf{v}||\mathbf{e}_1||},$$

com $\mathbf{e}_1$ o primeiro vetor da base canônica de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = ||\mathbf{v}||\mathbf{e}_1.$$

[14] Calcule a decomposição $\mathbf{QR}$ das matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

usando (a) o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, (b) as transformações de Householder e (c) as rotações de Givens.

Respostas dos Exercícios

[01] Dizer que o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possui pelo menos uma solução é equivalente a dizer que $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$. Dizer que $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} = 0$ é equivalente a dizer que $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T))^\perp$. Mas, pelo teorema fundamental da álgebra linear, $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T))^\perp$, o que estabelece o resultado.

[02] Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}(\mathbf{A})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}(\mathbf{A}))$, basta mostrar que $\mathbf{T}$ é sobrejetiva. Seja $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$. Existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$. Pelo teorema fundamental da álgebra linear, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Assim, existem únicos $\mathbf{x}_K \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{x}_R \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ tais que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \mathbf{x}_R$. Como $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}_R$, concluímos que $\mathbf{T}(\mathbf{x}_R) = \mathbf{Ax}_R = \mathbf{y}$.

[05] (a) A sentença é falsa. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno canônico. Sejam $U = [(1,0,0)]$ e $V = [(0,0,1)]$. Note que U é ortogonal a V, mas $U^\perp = [(0,1,0),(0,0,1)]$ não é ortogonal a $V^\perp = [(1,0,0),(0,1,0)]$.

(b) A sentença é falsa. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno canônico, Sejam $U = [(1,0,0)]$, $V = [(0,0,0)]$ e $W = U$. Note que U é ortogonal a V, V é ortogonal a W, mas U não é ortogonal a W.

[07] Se $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ é uma base ortonormal de W e $\{\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n\}$ é uma base ortonormal de $W^\perp$, então $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$. Nesta base, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ se escrevem da seguinte maneira

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \\ \mathbf{0}_{(n-k)\times k} & \mathbf{0}_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \\ \mathbf{0}_{(n-k)\times k} & \mathbf{I}_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}.$$

Então, $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n\times n}$, $\mathbf{PQ} = \mathbf{0}_{n\times n}$ e

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \\ \mathbf{0}_{(n-k)\times k} & -\mathbf{I}_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

que é igual a sua própria inversa, pois $(\mathbf{P}-\mathbf{Q})(\mathbf{P}-\mathbf{Q}) = \mathbf{I}$.

[08] Note que P é simétrica, pois $\mathbf{P}^T = (\mathbf{P}^T\mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T(\mathbf{P}^T)^T = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}$. Agora, usando que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, temos que

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}.$$

[10] $\mathbf{P}_R = \mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T$, onde $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$. Sendo assim, $\mathbf{P}_R = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$.

[12] Os itens (a), (b) e (c) podem ser resumidos no seguinte código `MATLAB`:

```
r = [1 2 3 4]; A = compan(poly(r)); n = 40;
for i=1:n [Q, R] = qr(A); A = R*Q; end; A
```

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 17/01/2010.